

Sur la méthode de Buser-Silhol pour l'uniformisation des surfaces de Riemann hyperelliptiques

THÈSE N° 4324 (2010)

PRÉSENTÉE LE 19 MARS 2010

À LA FACULTÉ SCIENCES DE BASE

CHAIRE DE GÉOMÉTRIE

PROGRAMME DOCTORAL EN MATHÉMATIQUES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Grégoire AUBRY

acceptée sur proposition du jury:

Prof. B. Dacorogna, président du jury

Prof. J. P. Buser, directeur de thèse

Prof. R. Kellerhals, rapporteur

Prof. R. Silhol, rapporteur

Prof. C. Stuart, rapporteur

Prof. M. Troyanov, rapporteur



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Suisse
2010

À mon épouse, Daniela

« Le rire est le plus court chemin entre deux personnes »

Charles Spencer Chaplin, Jr.

« Science sans conscience n'est que ruine de l'âme »

François Rabelais

Remerciements

Merci à Peter Buser de m'avoir introduit à ces fascinants objets mathématiques que sont les surfaces de Riemann. Je le remercie sincèrement de m'avoir fait l'honneur de me permettre d'effectuer mon travail de recherche sous sa direction ainsi que de m'avoir fait confiance durant ces quelques années passées au sein de la Chaire de Géométrie. J'y ai eu beaucoup de plaisir. Je le remercie aussi d'avoir été là dans les moments importants. Pour terminer, je le remercie pour ses qualités humaines ainsi que pour ces multiples instants mêlant mathématiques et humour.

Merci aux autres professeurs de mon jury de thèse de m'avoir fait le plaisir et l'honneur d'en faire partie. Merci à Bernard Dacorogna d'en avoir accepté la présidence. Merci à Ruth Kellerhals pour sa gentillesse et ses encouragements dès le début de ma thèse. Merci à Charles Stuart de m'avoir accordé son temps, de m'avoir fait des suggestions, et de m'avoir signalé une erreur importante qui m'obligea à modifier mon approche et qui, surtout, me permit de découvrir les formes différentielles sur les surfaces de Riemann. Merci à Robert Silhol pour ses conseils et de m'avoir transmis de nombreux exemples de surfaces de Riemann à uniformiser. Je le remercie aussi d'avoir récemment porté à ma connaissance l'appellation *artisan mathématicien*, dont je fais mon métier dès à présent. Merci à Marc Troyanov pour ses suggestions et ses éclairages sur les formes différentielles.

Merci à mes collègues géomètres. Merci à Klaus-Dieter Semmler d'avoir toujours pris le temps, même lorsqu'il n'en avait pas, pour discuter de mes nombreuses *petites questions*, ainsi que de m'avoir préparé des exemples intéressants de surfaces de Riemann à uniformiser. Merci à Hugo Parlier pour ces nombreuses discussions - mathématiques ou non - souvent teintées d'humour, et pour son amitié. Merci à Aline Aigon-Dupuy, Anthony Arnold, Björn Mützel, Marc Maintrot, Manuel Racle, Roland Rozsnyo, Stephen Ducret et Thomas Gauglhofer pour de nombreuses discussions intéressantes. Merci à Christophe Hebeisen, mon collègue de bureau à plusieurs reprises, pour son écoute, son aide et son amitié. Merci à Zahra Sinaei pour sa gentillesse et son amitié. Je la remercie de m'avoir fait découvrir son pays et sa culture. Ce fut un grand plaisir de partager mon bureau avec elle.

Merci à Léonard Gross et à Marc Perraudin pour leurs compétences informatiques, ainsi que pour ces nombreux instants où l'humour avait toujours sa place.

Merci à Mesdames Anna Dietler, Anne-Lise Courvoisier et Maroussia Schaffner Portillo pour leur gentillesse et leur efficacité.

Merci aux professeurs Antoine Derighetti et Libero Zuppiroli pour l'enthousiasme, la passion et la couleur qu'ils émettent. Cela fait du bien.

Merci à mes anciens professeurs de mathématiques Anne Gilliard, Cosette Boillat, Benoît Gogniat, Gilles Grandjean et Jean-Michel Boillat de m'avoir enseigné, entre autres, les mathématiques avec tant de plaisir et de justesse.

Merci à mes amis qui m'ont soutenu de près ou de loin, depuis longtemps. Merci en particulier à Benjamin, Jean-Marie, Kathryn, Marcel, Marjorie, Mark, Nicolas, Paulo, Raphaëlle, Sadhvi et Sébastien. Merci aussi à Stéphane. Merci à Baptiste, Cédric et Claudio pour leur amitié ainsi que tout ce que nous avons partagé.

Merci à ma grand-mère, Paulette. Merci à mes parents, Jean-Marie et Marie-Andrée. Merci à mes sœurs Sarah et Mélanie, ainsi qu'à leur famille, Fabio, Robert et Jules. Je les remercie sincèrement pour leur soutien.

Finalement, un immense MERCI à mon épouse, Daniela. Je la remercie pour sa patience, son attention et son amour. *Dana, te iubesc din toată inima mea !*

La Chaux-des-Breuleux, le 19 mars 2010.

Abstract

The Uniformization Theorem due to Koebe and Poincaré implies that every compact Riemann surface of genus greater or equal to 2 can be endowed with a metric of constant curvature -1 . On the other hand, a compact Riemann surface is a complex algebraic curve and is therefore described by a polynomial equation with complex coefficients. The uniformization problem is then to link explicitly these two descriptions.

In [BS05b], Peter Buser and Robert Silhol develop a new uniformization method for compact Riemann surfaces of genus two. Given such a surface S , the method describes a polynomial equation of an algebraic curve conformally equivalent to S . However, in this method appear a complex number τ_{BS} and a function f_{BS} which is holomorphic on the unit disk, both being characterized by some functional equations. This means that τ_{BS}, f_{BS} are given implicitly. P. Buser and R. Silhol then approximate them numerically by a complex number τ and a polynomial p using the approximation method developped in [BS05a]. In cases where the equation of the algebraic curve is known, they notice that these approximations are very good.

In this thesis we prove a convergence theorem for the approximation method of P. Buser and R. Silhol, and we propose an adaptation of their method that allows to solve some of the numerical problems to which it is prone. Moreover, we generalize this uniformization method to hyperelliptic Riemann surfaces of genus greater than 2, and we give some examples of numerical uniformization in genus 3.

Keywords : Riemann surfaces, algebraic curves, numerical uniformization, conformal geometry.

Résumé

Le Théorème d'uniformisation de Koebe et Poincaré implique que toute surface de Riemann compacte de genre plus grand ou égal à 2 peut être munie d'une métrique de courbure constante -1 . D'autre part, une surface de Riemann compacte est une courbe algébrique complexe, et est donc décrite par une équation polynomiale à coefficients complexes. Le problème de l'uniformisation est de lier explicitement ces deux descriptions.

Dans [BS05b], Peter Buser et Robert Silhol développent une nouvelle méthode d'uniformisation des surfaces de Riemann compactes de genre deux. Étant donné une telle surface S , cette méthode décrit une équation polynomiale pour une courbe algébrique conformément équivalente à S . Dans cette méthode apparaissent toutefois un certain nombre complexe τ_{BS} et une certaine fonction f_{BS} holomorphe sur le disque unité, tous deux caractérisés par certaines équations fonctionnelles. La donnée de $\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}}$ est donc implicite. P. Buser et R. Silhol approchent alors numériquement $\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}}$ par un nombre complexe τ et un polynôme p respectivement via la méthode d'approximation développée dans [BS05a]. Dans des cas où l'équation de la courbe algébrique est connue, ils observent que ces approximations sont de très bonne qualité.

Dans cette thèse, nous démontrons un théorème de convergence pour la méthode d'approximation de P. Buser et R. Silhol et nous proposons une adaptation de cette méthode permettant de remédier à certains des problèmes numériques auxquels elle est sujette. De plus, nous généralisons cette méthode d'uniformisation aux surfaces de Riemann hyperelliptiques de genre supérieur à 2 et nous donnons des exemples d'uniformisation numérique en genre 3.

Mots-clé : surfaces de Riemann, courbes algébriques, uniformisation numérique, géométrie conforme.

Table des matières

Remerciements	v
Abstract	vii
Résumé	ix
Introduction	1
1 Préliminaires	5
1.1 Surfaces de Riemann et courbes algébriques	5
1.2 Uniformisation des surfaces de Riemann	11
1.3 Méthode d'uniformisation conforme de Buser-Silhol	14
1.4 Méthode d'approximation de Buser-Silhol	18
1.5 Exemples numériques	24
2 Rappels et résultats préparatoires	33
2.1 Éléments de la théorie de l'approximation complexe	33
2.1.1 Théorie classique	33
2.1.2 Une conséquence du Lemme de Schwarz	38
2.2 Éléments de la théorie des formes différentielles sur les surfaces de Riemann .	43
2.2.1 Théorie classique	43
2.2.2 Définition et propriétés de la forme différentielle harmonique ω_{BS} . . .	52
3 Sur la convergence de la méthode d'approximation de Buser-Silhol	55
3.1 Modèle théorique	55
3.1.1 Définitions et notations	55
3.1.2 Approximation dans l'espace de Hilbert X	57
3.1.3 L'opérateur ψ et la fonctionnelle φ_Y	59
3.1.4 La fonctionnelle φ_*	63
3.2 Approximation par minimisation de norme sur des domaines	64
3.2.1 Théorème principal et stratégie de démonstration	65
3.2.2 Définition et propriétés d'une suite de formes différentielles $\{\omega^n\}_{n \geq 1}$.	66
3.2.3 Convergence de la suite $\{t_n\}_{n \geq 1}$	84
3.2.4 Convergence de la suite $\{h_n\}_{n \geq 1}$	85
3.3 Approximation par minimisation de norme sur des arcs	89
3.4 Approximation par minimisation de semi-norme sur des arcs	92
3.5 Approximation par minimisation de semi-norme sur des domaines	104

4	Généralisation de la méthode d'uniformisation de Buser-Silhol	117
4.1	Généralisation des définitions et résultats	117
4.2	Exemples d'uniformisation numérique en genre 3	125
5	Méthode d'uniformisation via décomposition du polygone admissible	131
5.1	Cadre théorique de la méthode	131
5.2	Exemples d'uniformisation numérique via décomposition	136
6	Commentaires et perspectives de recherche	141
6.1	Sur la Conjecture 3.52	141
6.2	Aspects numériques de la méthode d'approximation de Buser-Silhol	142
6.3	Domaines canoniques	143
6.4	Dérivée schwarzienne et fonction uniformisante	144
6.5	Module conforme de quadrilatères	144
6.6	Développement d'applications informatiques	145
	Bibliographie	147
	Curriculum vitæ	151

Introduction

Le sujet du présent travail de thèse se situe à l'intersection de la géométrie conforme et des surfaces de Riemann, et s'intéresse à la problématique de l'uniformisation des surfaces de Riemann compactes, qui est la suivante : une conséquence du Théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann simplement connexes (Koebe, Poincaré, 1907) est que toute surface de Riemann compacte de genre plus grand ou égal à 2 peut être exprimée comme le quotient du disque de Poincaré \mathbb{D} par un groupe G d'applications biholomorphes de \mathbb{D} agissant proprement discontinûment et sans points fixes. Les applications biholomorphes du disque de Poincaré étant exactement ses isométries, toute surface de Riemann compacte de genre plus grand ou égal à 2 peut ainsi être munie de la métrique hyperbolique de courbure constante moins un via la projection canonique $\pi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}/G$. Par ailleurs, toute surface de Riemann compacte est aussi une courbe algébrique sur \mathbb{C} . Le problème de l'uniformisation est de lier *explicitement* ces deux descriptions.

Dans le présent travail, nous nous intéressons au problème de l'uniformisation inverse, qui est de trouver une description algébrique correspondant à une description géométrique donnée. Plus précisément, nous nous intéressons à la méthode d'uniformisation conforme développée par Peter Buser et Robert Silhol dans [BS05b] pour les surfaces de Riemann compactes de genre 2. En genre 2, toute surface de Riemann compacte S est hyperelliptique. Par conséquent, S peut être décrite comme le quotient \mathbb{D}/G , où G est un groupe d'isométries de \mathbb{D} qui admet comme domaine fondamental un octogone hyperbolique \mathcal{O} possédant une symétrie centrale et dont les isométries identifiant les côtés opposés engendrent G . D'autre part, la courbe algébrique \mathcal{C} conformément équivalente à S peut être décrite comme un revêtement double $F : \mathbb{D} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ au-dessus de la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ avec les points de ramification $0, 1, \infty, a_1, a_2, a_3$, où $a_1, a_2, a_3 \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$ sont deux à deux distincts. Autrement dit, la courbe algébrique \mathcal{C} est décrite par l'équation polynomiale

$$y^2 = x(x-1)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3).$$

Pour une surface de Riemann compacte S de genre 2 donnée par un octogone \mathcal{O} admettant une symétrie centrale et son groupe d'isométries G engendré par les isométries identifiant les côtés opposés de \mathcal{O} , *i.e.* $S = \mathbb{D}/G$, la méthode d'uniformisation de Buser-Silhol donne explicitement les coefficients a_1, a_2, a_3 du polynôme associé à une courbe algébrique \mathcal{C} conformément équivalente à S , via l'introduction d'un nombre complexe τ_{BS} et d'une fonction holomorphe impaire $f_{\text{BS}} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ caractérisés par certaines équations fonctionnelles, appelées *relations de périodicité*. Une des idées essentielles de l'approche de P. Buser et R. Silhol est de ramener le problème à celui du genre 1, résolu depuis le XIX^{ème} siècle, via τ_{BS} et f_{BS} . Mentionnons que le tore dont il est question est donné par $\mathbb{C}/\Lambda_{\tau_{\text{BS}}}$, où $\Lambda_{\tau_{\text{BS}}} \subset \mathbb{C}$ est le réseau engendré par 2 et $2\tau_{\text{BS}}$.

Puisque τ_{BS} et f_{BS} ne sont donnés qu’implicitement par les relations de périodicité, le problème est alors d’estimer τ_{BS} et f_{BS} . La fonction f_{BS} étant holomorphe et impaire, elle possède un développement en série de Taylor $f_{\text{BS}}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j z^{2j-1}$ convergeant localement uniformément sur \mathbb{D} . P. Buser et R. Silhol approchent alors τ_{BS} et f_{BS} par un nombre complexe τ_n^M et un polynôme impair p_n^M de degré $2n - 1$, obtenus comme solutions au sens des moindres carrés d’un système surdéterminé d’équations linéaires basé sur l’évaluation en $4M$ points des relations de périodicité caractérisant τ_{BS} et f_{BS} . Dans des cas où l’uniformisation est connue explicitement, P. Buser et R. Silhol observent que les approximations numériques obtenues, via le code Maple développé dans [BS05a], sont des approximations de très bonne qualité de τ_{BS} et f_{BS} .

La méthode d’approximation de P. Buser et R. Silhol pour l’estimation de τ_{BS} et f_{BS} souffre toutefois des deux problèmes suivants :

- A. Bien que la méthode d’approximation produise des estimations de haute qualité dans des cas où l’uniformisation est connue, il n’y a pas de preuve mathématique de sa convergence.
- B. En général, un octogone fondamental \mathcal{O} admet des sommets euclidiennement proches du bord de \mathbb{D} dans \mathbb{C} (*i.e.* leur valeur absolue est proche de 1). Dans de tels cas, de nombreuses expérimentations numériques montrent que la méthode d’approximation perd de son efficacité de manière significative. De fait, les approximations numériques de τ_{BS} et f_{BS} s’avèrent alors très mauvaises, voire inutilisables.

Les principaux résultats de la thèse sont les suivants :

- 1) Développement d’un modèle d’analyse fonctionnelle dans lequel nous démontrons un théorème de convergence pour la méthode d’approximation de Buser-Silhol.
- 2) Généralisation de la méthode d’uniformisation de Buser-Silhol (y compris la méthode d’approximation) aux surfaces de Riemann hyperelliptiques de genre plus grand ou égal à 3.
- 3) Développement d’une méthode de décomposition du polygone fondamental (*e.g.* l’octogone \mathcal{O}) en polygones hyperboliques plus petits et couplage de celle-ci avec la méthode d’approximation de Buser-Silhol, dans le but remédier à la mauvaise qualité des approximations issues de cette dernière lorsque le polygone fondamental est mal conditionné numériquement.

Le présent travail est structuré comme suit.

Nous débutons le Chapitre 1 par quelques rappels sur les surfaces de Riemann, les courbes algébriques et le Théorème d’uniformisation (Sections 1.1 et 1.2). Nous présentons ensuite la méthode d’uniformisation développée par P. Buser et R. Silhol pour les surfaces de Riemann compactes de genre 2 (Section 1.3) ainsi que leur méthode d’approximation et plusieurs exemples numériques (Section 1.4).

Dans le Chapitre 2, nous rappelons quelques éléments de la théorie de l’approximation complexe et développons une conséquence du Lemme de Schwarz (Section 2.1). En seconde partie de ce chapitre, nous rappelons quelques éléments de la théorie des formes différentielles sur les

surfaces de Riemann et donnons les propriétés d'une forme différentielle harmonique construite à partir de la fonction f_{BS} (Section 2.2). Les outils et les résultats développés dans ce chapitre sont fondamentaux pour notre étude de la méthode d'approximation de Buser-Silhol pour $\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}}$ au chapitre suivant.

Le Chapitre 3 contient les résultats principaux de notre étude de convergence de la méthode d'approximation de Buser-Silhol. Nous commençons par introduire un modèle d'analyse fonctionnelle permettant de caractériser le nombre complexe τ_{BS} et la fonction f_{BS} (Section 3.1). Ensuite, dans la Section 3.2, nous démontrons la convergence d'une suite d'approximations de $\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}}$ issue d'un processus de minimisation d'une certaine norme sur des domaines particuliers. Dans la Section 3.3, nous discutons l'existence et la convergence d'une suite d'approximations de $\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}}$ issue, elle, d'un processus de minimisation d'une certaine norme sur des arcs de courbe particuliers, inclus dans le bord de l'octogone. Nous nous intéressons, dans la Section 3.4, à une suite d'approximations de $\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}}$ issue d'un processus de minimisation d'une semi-norme sur des arcs de courbes (les mêmes qu'à la section précédente). Nous terminons ce chapitre par une discussion d'une suite d'approximations issue d'un processus de minimisation d'une semi-norme sur des domaines, en particulier via des ε -nets (Section 3.5). Un schéma mettant en relation la convergence (démontrée ou conjecturée) des diverses suites d'approximations de $\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}}$ est illustré dans la Table 3.8 en page 94.

Dans le Chapitre 4, d'une part, nous généralisons aux surfaces de Riemann hyperelliptiques de genre supérieur à 2, les définitions et les résultats décrivant la méthode de Buser-Silhol pour l'uniformisation conforme des surfaces de Riemann hyperelliptiques de genre deux (Section 4.1) et, d'autre part, nous présentons deux uniformisations numériques d'une surface de Riemann hyperelliptique de genre trois (Section 4.2).

En général, plusieurs des sommets de l'octogone \mathcal{O} sont euclidiennement très proches du bord de \mathbb{D} . Ce mauvais conditionnement numérique a pour conséquence la très mauvaise qualité des approximations issues de la méthode d'approximation de Buser-Silhol. Dans le Chapitre 5, nous proposons une adaptation de cette méthode à une décomposition de l'octogone \mathcal{O} en polygones hyperboliques plus petits dans le but de remédier à certains des problèmes numériques auxquels est sujette la méthode d'approximation de Buser-Silhol.

Dans le dernier chapitre de cette thèse (Chapitre 6), nous présentons quelques remarques et questions relatives à nos recherches actuelles et futures. Certaines sont bien avancées, d'autres méritent encore d'être mûries et mieux formulées. Nous nous intéressons, en particulier : à la démonstration de la Conjecture 3.52 (Section 6.1) ; à des aspects numériques de la méthode d'approximation de Buser-Silhol (Section 6.2) ; à de probables liens entre $\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}}$ et une certaine fonction méromorphe sur \mathbb{C} , obtenue via la dérivée schwarzienne des inverses locaux de la fonction uniformisante $F : \mathbb{D} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ et dont l'expression est explicite, dans une certaine mesure (Section 6.4) ; au module conforme de quadrilatères dont le domaine est \mathcal{O} et $f_{\text{BS}}(\mathcal{O})$ (Section 6.5) ; à ce que devrait - et pourrait - être une *bonne notion de domaine canonique* décrivant une surface de Riemann hyperbolique et, en particulier, permettant de construire un *bon* domaine fondamental \mathcal{P} pour l'uniformisation à la Buser-Silhol de la surface hyperelliptique associée (Section 6.3) ; et, finalement, au développement d'applications informatiques dans le but d'effectuer des expérimentations numériques sur les surfaces de Riemann (Section 6.6).

Chapitre 1

Préliminaires

Ce premier chapitre a pour but d'introduire le sujet du présent travail et de fixer les notations. Les Sections 1.1 et 1.2 sont dédiées au rappel de quelques éléments de la théorie des surfaces de Riemann. Nos références principales pour cette partie sont les ouvrages de R. Miranda [Mir95], de H. Farkas et I. Kra [FK92], et de G. Jones et D. Singermann [JS87]. Nous présentons ensuite la méthode d'uniformisation conforme des surfaces de Riemann compactes de genre 2 développée par Peter Buser et Robert Silhol dans [BS05b] (Section 1.3) ainsi que leur méthode d'approximation décrite dans [BS05b] et [BS05a] (Section 1.4). Nous terminons le chapitre par quelques exemples numériques illustrant certaines des possibilités et des limites de cette méthode d'approximation (Section 1.5).

1.1 Surfaces de Riemann et courbes algébriques

Une *surface de Riemann (abstraite)* S est un espace topologique de Hausdorff connexe muni d'une structure conforme, *i.e.* d'un atlas maximal de cartes (U_α, ϕ_α) , avec $U_\alpha \subset S$ un ouvert et $\phi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}$ un homéomorphisme, tel que les changements de cartes

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

sont des fonctions holomorphes.

Les trois surfaces de Riemann simplement connexes que sont la *sphère de Riemann* $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ munie de l'atlas $\{(\mathbb{C}, \text{id}_{\mathbb{C}}), (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, z \longmapsto \frac{1}{z})\}$, le *plan complexe* \mathbb{C} muni de $\{(\mathbb{C}, \text{id}_{\mathbb{C}})\}$ et le *disque unité* $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ muni de $\{(\mathbb{D}, \text{id}_{\mathbb{D}})\}$, jouent un rôle particulier dans la théorie des surfaces de Riemann, rôle que nous rappelons plus bas. Les groupes d'automorphismes conformes de ces surfaces de Riemann, *i.e.* les applications biholomorphes, sont :

$$\text{Conf}(\widehat{\mathbb{C}}) = \{z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, \text{ avec } ad - bc \neq 0\},$$

$$\text{Conf}(\mathbb{C}) = \{z \longmapsto az + b \mid a, b \in \mathbb{C}, \text{ avec } a \neq 0\},$$

$$\text{Conf}(\mathbb{D}) = \{z \longmapsto \frac{az+b}{bz+\bar{a}} \mid a, b \in \mathbb{C}, \text{ avec } |a|^2 - |b|^2 = 1\}.$$

Courbe affine plane

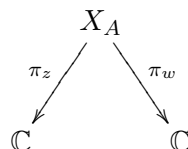
Notons $\mathbb{C}[z, w]$ l'anneau des polynômes en z, w à coefficients complexes. La *courbe affine plane* X_A associée à un polynôme $A \in \mathbb{C}[z, w]$ est l'ensemble des zéros de A dans \mathbb{C}^2

$$X_A = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid A(z, w) = 0\}.$$

Rappelons que la *non singularité* d'un polynôme $A \in \mathbb{C}[z, w]$ signifie que pour tout $(z_0, w_0) \in X_A$ les dérivées $\frac{\partial A}{\partial z}(z_0, w_0)$ et $\frac{\partial A}{\partial w}(z_0, w_0)$ ne sont pas toutes deux nulles.

Théorème 1.1 *Si $A \in \mathbb{C}[z, w]$ est un polynôme irréductible et non singulier, alors la courbe affine plane X_A est une surface de Riemann.*

Preuve. L'irréductibilité de A implique la connexité de X_A . La preuve de cette implication nécessite des outils de géométrie algébrique, voir par exemple [Sha94, Ch. VII]. La non singularité de A permet la définition d'un atlas conforme pour X_A à l'aide du Théorème des fonctions implicites. Nous en donnons la construction ci-après. Considérons π_z, π_w les projections



définies par $\pi_z(z, w) = z$ et $\pi_w(z, w) = w$, $(z, w) \in X_A$. Soit $(z_0, w_0) \in X_A$. Puisque X_A est non singulière, $\frac{\partial A}{\partial z}(z_0, w_0) \neq 0$ ou $\frac{\partial A}{\partial w}(z_0, w_0) \neq 0$. Supposons que $\frac{\partial A}{\partial w}(z_0, w_0) \neq 0$. Par le Théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage ouvert $U \subset X_A$ de (z_0, w_0) et une fonction holomorphe $g : \pi_z(U) \rightarrow \mathbb{C}$ tels que

$$\{(z, g(z)) \mid z \in \pi_z(U)\} \subset X_A,$$

autrement dit, dans le voisinage U , X_A est localement le graphe de g . La projection $\pi_z|_U$ est donc un homéomorphisme sur son image. Nous obtenons ainsi une carte $(U, \pi_z|_U)$ de X_A au voisinage de (z_0, w_0) . Si $\frac{\partial A}{\partial w}(z_0, w_0) = 0$ et $\frac{\partial A}{\partial z}(z_0, w_0) \neq 0$, nous définissons de manière similaire une carte de X_A au moyen de la projection π_w . Les changements de cartes de l'atlas ainsi défini sont bien holomorphes. En effet, si deux cartes issues de π_z (resp. π_w) ont une intersection non vide de leurs domaines, alors le changement de cartes est donné par la fonction identité sur cette intersection. Si une carte est issue de π_z et l'autre de π_w avec une intersection non vide de leurs domaines, considérons (z_0, w_0) un point appartenant à cette intersection. Supposons que dans un voisinage $U \subset X_A$ de (z_0, w_0) nous ayons $\{(z, g(z)) \mid z \in \pi_z(U)\} \subset X_A$, avec une fonction holomorphe $g : \pi_z(U) \rightarrow \mathbb{C}$; alors le changement de cartes est donné par $\pi_w \circ (\pi_z|_U)^{-1}(z) = \pi_w(z, g(z)) = g(z)$, $z \in \pi_z(U)$. Par conséquent, $\pi_w \circ (\pi_z|_U)^{-1}$ est holomorphe. X_A est ainsi bien muni d'un atlas conforme, qui induit une structure conforme. \square

Remarque 1.2 La courbe affine plane X_A associée à un polynôme $A \in \mathbb{C}[z, w]$ n'est pas compacte. En effet, $X_A \subset \mathbb{C}^2$ n'est pas bornée, car pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ il existe $w \in \mathbb{C}$ tel que $A(z_0, w) = 0$.

Surface de Riemann hyperelliptique

Une classe importante de surfaces de Riemann compactes est constituée des surfaces de Riemann *hyperelliptique*. Une surface de Riemann S est ainsi nommée s'il existe une fonction holomorphe $\pi_h : S \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ surjective de degré 2. La fonction π_h est alors appelée *projection hyperelliptique*. Si S est une surface de Riemann hyperelliptique et $\pi_h : S \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ la projection hyperelliptique associée, l'application biholomorphe $\varphi_h : S \longrightarrow S$ définie par

$$\varphi_h(x) = \begin{cases} x' & \text{où } x' \neq x, \text{ avec } \pi_h(x') = \pi_h(x) \text{ si } x \text{ n'est pas un point de ramification de } \pi_h \\ x & \text{si } x \text{ est un point de ramification de } \pi_h \end{cases}$$

est appelée *involution hyperelliptique*.

Nous décrivons à présent une méthode classique de compactification d'une courbe affine plane produisant une surface de Riemann hyperelliptique.

Soient $n \geq 0$ un entier et $A \in \mathbb{C}[z, w]$ le polynôme défini par

$$A(z, w) = w^2 - h(z)$$

où $h \in \mathbb{C}[z]$ est un polynôme de degré $2n + \epsilon$, avec $\epsilon \in \{1, 2\}$, dont les racines sont deux à deux distinctes. Nous posons

$$h(z) = (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_{2n+1})(z - \widehat{a_{2n+2}}) \quad (1.3)$$

avec $a_1, \dots, a_{2n+1} \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts. Si le degré de h est pair, nous avons $a_{2n+2} \in \mathbb{C}$ distinct de a_1, \dots, a_{2n+1} et si le degré de h est impair le terme $(z - \widehat{a_{2n+2}})$ est omis et nous posons $a_{2n+2} = \infty$. Les racines de h étant deux à deux distinctes, A est un polynôme irréductible et non singulier, et par conséquent X_A est une surface de Riemann (Théorème 1.1). Le coefficient devant le monôme de plus haut degré de h peut être supposé égal à 1, sans perte de généralité. En effet, les courbes affines planes X_A et $X_{\tilde{A}}$ associées aux polynômes

$$A(z, w) = w^2 - (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_{2n+1})(z - \widehat{a_{2n+2}}),$$

$$\tilde{A}(z, w) = w^2 - c(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_{2n+1})(z - \widehat{a_{2n+2}})$$

respectivement, sont conformément équivalentes via l'application biholomorphe

$$X_A \longrightarrow X_{\tilde{A}}$$

$$(z, w) \longmapsto (z, w\sqrt{c}).$$

Dans toute cette section, nous supposons que le polynôme h a la forme donnée dans (1.3). Nous procédons à présent à une compactification de X_A en une surface de Riemann hyperelliptique S_A . Considérons U_A l'ouvert de X_A défini par

$$U_A = \{(z, w) \in X_A \mid z \neq 0\}.$$

Notons que $X_A \setminus U_A$ contient un ou deux éléments, selon que le degré du polynôme h est impair, respectivement pair. Soit $B \in \mathbb{C}[x, y]$ le polynôme défini par

$$B(x, y) = y^2 - k(x)$$

où $k \in \mathbb{C}[x]$ est défini par $k(x) = x^{2n+2}h(\frac{1}{x})$. Le polynôme k est de degré $2n+\tilde{\epsilon}$, avec $\tilde{\epsilon} \in \{1, 2\}$, et ses racines sont distinctes puisque celles de h le sont. Soient encore X_B la courbe affine plane associée à B et U_B l'ouvert de X_B défini par

$$U_B = \{(x, y) \in X_B \mid x \neq 0\}.$$

Finalement, considérons la fonction biholomorphe $\psi : U_A \longrightarrow U_B$ définie par

$$\psi(z, w) = \left(\frac{1}{z}, \frac{w}{z^{n+1}}\right), \quad (z, w) \in U_A.$$

En recollant X_A et X_B le long de U_A et U_B via ψ nous obtenons la surface

$$S_A = (X_A \amalg Y_A)/\psi.$$

Proposition 1.4 *S_A est une surface de Riemann hyperelliptique de genre n . La projection $\pi_z : X_A \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\pi_z(z, w) = z$ s'étend alors en la projection hyperelliptique de S_A $\pi_h : S_A \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Les points de ramification de π_h sont les racines de h (et le point ∞ si h est de degré impair). De plus, l'involution hyperelliptique $\varphi_h : S_A \longrightarrow S_A$ est donnée par $\varphi_h([(z, w)]) = [(z, -w)]$.*

Preuve. Nous reprenons essentiellement la preuve donnée dans [Mir95, p.61]. L'union disjointe de X et Y quotientée par ψ , dénotée $(X_A \amalg Y_A)/\psi$, nous donne une surface topologique fermée. La compacité de S_A vient du fait que S_A est homéomorphe à la réunion des boules fermées (dans \mathbb{C}^2)

$$B_A = \{(z, w) \in X_A \mid |z| \leq 1\} \quad \text{et} \quad B_B = \{(x, y) \in X_B \mid |x| \leq 1\}$$

quotientées par l'homéomorphisme $\tilde{\psi} : \partial B_A \longrightarrow \partial B_B$ définie par $\tilde{\psi} = \psi|_{\partial B_A}$ où ∂B_* est le bord de B_* dans \mathbb{C}^2 . La structure conforme de S_A est issue de l'atlas conforme construit à l'aide des atlas conformes de X_A, X_B et des inclusions naturelles $\iota_A : X_A \hookrightarrow S_A$, $\iota_B : X_B \hookrightarrow S_A$. Ces inclusions naturelles sont alors holomorphes.

La projection π_z s'étend de manière naturelle en une application $\pi_h : S_A \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ définie par

$$\pi_h([(z, w)]) = \begin{cases} z & \text{si } (z, w) \in X_A \\ 1/z & \text{si } (z, w) \in X_B \end{cases}$$

avec la convention habituelle $1/0 = \infty$. L'application π_h est bien définie puisque pour $(z, w) \in U_A = \pi_h^{-1}(U_B)$, il vient

$$\pi_h([\psi(z, w)]) = \pi_h\left(\left[\left(\frac{1}{z}, \frac{w}{z^{n+1}}\right)\right]\right) = z = \pi_h([(z, w)]).$$

Par construction, π_h est holomorphe sur $\iota_A(X_A)$. Il reste à vérifier que π_h est holomorphe au voisinage de $\iota_B(X_B \setminus U_B)$. Pour cela, considérons $(0, w) \in X_B \setminus U_B$. Puisque $\frac{\partial B}{\partial z}(0, w) \neq 0$, le Théorème des fonctions implicites garantit l'existence d'un voisinage ouvert $V \subset X_B$ de $(0, w)$ et d'une fonction holomorphe $g : \pi_w(V) \longrightarrow \mathbb{C}$ tels que $\{(g(w), w) \mid w \in \pi_w(V)\} \subset X_B$. L'expression de π_h dans les cartes $(V, \pi_w|_V)$ de X_B et $(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, \phi)$ de $\hat{\mathbb{C}}$, avec $\phi(z) = \frac{1}{z}$, est

$$\phi \circ \pi_h \circ (\pi_w|_V)^{-1}(w) = \phi \circ \pi_h(g(w), w) = \phi\left(\frac{1}{g(w)}\right) = g(w)$$

qui est holomorphe. Ainsi $\pi_h : S_A \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ est holomorphe. Par construction, π_h est de degré 2. La préimage d'un point de $\widehat{\mathbb{C}}$ contient soit deux points de multiplicité 1, soit un point (de ramification) de multiplicité 2. Les points de ramification de π_h sont au nombre de $2n+2$. Ce sont les $2n+2$ zéros de h si h est de degré pair, ou les $2n+1$ zéros de h et le point au-dessus de ∞ si h est de degré impair. La formule de Riemann-Hurwitz relie alors les genres n_{S_A} de S_A et $n_{\widehat{\mathbb{C}}} = 0$ de $\widehat{\mathbb{C}}$ comme suit :

$$2n_{S_A} - 2 = \deg(\pi_h)(2n_{\widehat{\mathbb{C}}} - 2) + \sum_{p \in S_A} (\text{mult}_p(\pi_h) - 1) = 2(-2) + 2n + 2.$$

Ainsi, la surface S_A est de genre $n_{S_A} = n$ et la proposition s'ensuit. \square

De fait, toute surface de Riemann hyperelliptique est issue de la construction ci-dessus.

Théorème 1.5 *Soit S une surface de Riemann hyperelliptique de genre $n \geq 0$. Il existe alors un polynôme $A \in \mathbb{C}[z, w]$ de la forme $A(z, w) = w^2 - h(z)$ avec $h \in \mathbb{C}[z]$, un polyôme du type (1.3) de degré $2n + \epsilon$, $\epsilon \in \{1, 2\}$, tel que S et S_A sont conformément équivalentes.*

Preuve. Voir par exemple [Mir95, Proposition 4.11, p. 92]. \square

Proposition 1.6 *Deux surfaces hyperelliptiques S_A et S_B associées aux polynômes*

$$\begin{aligned} A(z, w) &= w^2 - (z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_{2n+1})(z - \widehat{a_{2n+2}}), \\ B(x, y) &= y^2 - (x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_{2n+1})(x - \widehat{b_{2n+2}}), \end{aligned}$$

avec $n \geq 0$, sont conformément équivalentes si et seulement s'il existe une application biholomorphe $g \in \text{Conf}(\widehat{\mathbb{C}})$ et une permutation θ de l'ensemble d'indices $\{1, 2, \dots, 2n+2\}$ telles que

$$g(a_{\theta(i)}) = b_i, \quad i = 1, \dots, 2n+2.$$

Preuve (esquisse). Notons $\pi_h^A : S_A \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ et $\pi_h^B : S_B \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ les projections hyperelliptiques de S_A et S_B respectivement. Supposons que S_A et S_B sont conformément équivalentes via une application biholomorphe $\tilde{g} : S_A \longrightarrow S_B$. Puisque $\pi_h^B \circ \tilde{g} : S_A \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ est aussi de degré 2, il existe une application biholomorphe $g \in \text{Conf}(\widehat{\mathbb{C}})$ telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} S_A & \xrightarrow{\tilde{g}} & S_B \\ \pi_h^A \downarrow & & \downarrow \pi_h^B \\ \widehat{\mathbb{C}} & \xrightarrow[g]{-} & \widehat{\mathbb{C}} \end{array}$$

De plus, les points de ramification de $\pi_h^B \circ \tilde{g}$ sont les mêmes que ceux de π_h^A (voir par exemple [FK92, Théorème III.7.3, p. 101]). Réciproquement, supposons qu'il existe une application biholomorphe $g \in \text{Conf}(\widehat{\mathbb{C}})$ et une permutation θ de l'ensemble d'indices $\{1, 2, \dots, 2n+2\}$ telles que $g(a_{\theta(i)}) = b_i$, $i = 1, \dots, 2n+2$. Les applications de revêtement (ramifié) $g \circ \pi_h^A : S_A \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ et $\pi_h^B : S_B \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ sont alors toutes deux de degré 2, les images de leurs points de ramification sont identiques et elles ont la même monodromie. Il existe ainsi (voir par exemple [Mir95, p.

92]) une application biholomorphe $\tilde{g} : S_A \longrightarrow S_B$ telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} S_A & \xrightarrow{\tilde{g}} & S_B \\ \pi_h^A \downarrow & & \downarrow \pi_h^B \\ \widehat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{g} & \widehat{\mathbb{C}} \end{array}$$

La proposition s'ensuit. \square

Corollaire 1.7 Soit S_A la surface de Riemann hyperelliptique associée au polynôme

$$A(z, w) = w^2 - (z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_{2n+1})(z - \widehat{a_{2n+2}}),$$

avec $n \geq 1$, et $g \in \text{Conf}(\widehat{\mathbb{C}})$ l'application biholomorphe définie par

$$g(a_{2n}) = 0, \quad g(a_{2n+1}) = 1, \quad g(a_{2n+2}) = \infty.$$

Alors S_A est conformément équivalente à la surface de Riemann hyperelliptique S_B associée au polynôme

$$B(x, y) = y^2 - x(x - 1)(x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_{2n-1})$$

avec $b_i = g(a_i)$, $i = 1, \dots, 2n + 2$.

Preuve. Conséquence immédiate de la Proposition 1.6. \square

Remarque 1.8 Le Corollaire 1.7 est (trivialement) vérifié dans le cas $n = 0$, en adaptant la notation.

Ainsi, toute surface de Riemann hyperelliptique de genre $n \geq 0$ est conformément équivalente à

$$\mathcal{C}_A = \{(z, w) \in \widehat{\mathbb{C}} \times \widehat{\mathbb{C}} \mid A(z, w) = 0\} = X_A \cup \{(\infty, \infty)\},$$

pour un polynôme $A \in \mathbb{C}[z, w]$ de la forme

$$A(z, w) = w^2 - z(z - 1)(z - a_1) \cdots (z - a_{2n-1})$$

avec $a_1, \dots, a_{2n-1} \in \widehat{\mathbb{C}}$ deux à deux distincts, muni de la structure conforme induite par l'atlas conforme composé de l'atlas de X_A et de la carte (U_∞, ϕ_∞) de \mathcal{C}_A au voisinage de (∞, ∞) définie comme suit : considérons les applications

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}_A \setminus \{(0, 0)\} & \xrightarrow{\psi} & X_B & \xrightarrow{\pi_y} & \mathbb{C} \\ (z, w) & \longmapsto & \left(\frac{1}{z}, \frac{w}{z^{n+1}} \right) & \longmapsto & \frac{w}{z^{n+1}}, \end{array}$$

où $\psi(\infty, \infty) = (0, 0)$, $B \in \mathbb{C}[x, y]$ est le polynôme défini par

$$B(x, y) = y^2 - x^{2n+2}h\left(\frac{1}{x}\right) = y^2 - x(1 - x)(1 - a_1x) \cdots (1 - a_{2n-1}x)$$

et X_B est la courbe affine plane associée à B . Puisque $\frac{\partial B}{\partial x}(0,0) = a_1 a_2 \dots a_{2n-1} \neq 0$, il existe, par le Théorème des fonctions implicites, un voisinage ouvert $U \subset X_B$ de $(0,0)$ et une fonction holomorphe $g : \pi_y(U) \rightarrow \mathbb{C}$ tels que $\{(g(y), y) \mid y \in \pi_w(U)\} = U \subset X_B$. Soient $\varepsilon > 0$ tel que $U_\infty = \{(z, w) \in \mathcal{C}_A \mid |z| > \frac{1}{\varepsilon}\}$ vérifie $\phi(U_\infty) \subset U$, et $\phi_\infty : U_\infty \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par $\phi_\infty(z, w) = \pi_y \circ \psi(z, w) = \frac{w}{z^{n+1}}$. Par construction ϕ_∞ est un homéomorphisme sur son image et (U_∞, ϕ_∞) complète l'atlas de X_A en un atlas conforme de \mathcal{C}_A .

Définition 1.9 \mathcal{C}_A est appelée la *courbe algébrique (hyperelliptique)* associée au polynôme

$$A(z, w) = w^2 - z(z-1)(z-a_1) \cdots (z-a_{2n-1}).$$

Nous terminons cette section par le résultat suivant.

Théorème 1.10 *Toute surface de Riemann compacte de genre $n \leq 2$ est hyperelliptique.*

Preuve. Voir par exemple [FK92, Proposition III.7.2, p. 100]. \square

1.2 Uniformisation des surfaces de Riemann

À toute surface de Riemann hyperelliptique S correspond une courbe algébrique \mathcal{C} conformément équivalente à S . La structure conforme de \mathcal{C} nous donne un ensemble de paramétrisations *locales* de \mathcal{C} . Il est alors naturel de se poser la question de l'existence d'une paramétrisation *uniforme* de \mathcal{C} , *i.e.* d'une paramétrisation *globale* de \mathcal{C} ,

$$\mathcal{P} : X \rightarrow \mathcal{C},$$

dont le domaine X est *simplement connexe*. La réponse est affirmative et l'existence d'une telle paramétrisation uniforme est donnée par le Théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann, dû à Paul Koebe et Henri Poincaré.

Le Théorème

Théorème 1.11 (Théorème d'uniformisation, Koebe, Poincaré, 1907) *Toute surface de Riemann simplement connexe est conformément équivalente à la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$, au plan complexe \mathbb{C} ou bien au disque de Poincaré \mathbb{D} .*

Une preuve de ce résultat fondamental se trouve par exemple dans [Ahl73]. Notons toutefois que nous pouvons aisément nous convaincre que ces trois surfaces ne peuvent pas être conformément équivalentes. D'une part, au vu de sa compacité, la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ ne peut être homéomorphe ni à \mathbb{C} , ni à \mathbb{D} . D'autre part, le plan complexe et le disque unité ne peuvent être conformément équivalents puisque toute application holomorphe de \mathbb{C} vers \mathbb{D} est bornée et donc constante par le Théorème de Liouville.

À présent, soit S une surface de Riemann arbitraire.

Soit $\pi : \tilde{S} \longrightarrow S$ le revêtement universel de S . La structure conforme de S se relève en une structure conforme de \tilde{S} de sorte que la surface simplement connexe \tilde{S} devient une surface de Riemann et l'application de revêtement π une application holomorphe. Grâce au Théorème d'uniformisation, nous pouvons supposer $\tilde{S} = X$ pour un $X \in \{\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{D}\}$. Notons $\text{Deck}(S)$ le groupe des applications de revêtement de S , *i.e.* le groupe

$$\text{Deck}(S) = \{g : X \longrightarrow X \text{ biholomorphe} \mid \pi \circ g = \pi\}.$$

Ce groupe d'automorphismes conformes agit proprement discontinûment et sans points fixes sur X , et nous obtenons ainsi une équivalence conforme entre les surfaces de Riemann S et $X/\text{Deck}(S)$.

Corollaire 1.12 *Toute surface de Riemann S est conformément équivalente au quotient $X/\text{Deck}(S)$ où $X \in \{\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{D}\}$ est le revêtement universel de S .*

Nous traitons brièvement les possibilités pour $\text{Deck}(S)$ selon que le revêtement universel X de S est la sphère de Riemann, le plan complexe ou le disque unité. Si $X = \hat{\mathbb{C}}$, nous avons $\text{Deck}(S) = \{\text{id}_{\hat{\mathbb{C}}}\}$ puisque tout automorphisme conforme de $\hat{\mathbb{C}}$ admet au moins un point fixe et que $\text{Deck}(S)$ agit proprement discontinûment et sans points fixes. Par conséquent, S est conformément équivalente à $\hat{\mathbb{C}}$. Si $X = \mathbb{C}$, les seules possibilités pour $\text{Deck}(S)$ sont

$$\text{Deck}(S) = \begin{cases} \{\text{id}_{\mathbb{C}}\} \\ \langle z \longmapsto z + \omega \rangle & \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ donné} \\ \langle z \longmapsto z + \omega_1, z \longmapsto z + \omega_2 \rangle & \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ tels que } \frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R} \text{ donnés} \end{cases}$$

Par conséquent, S est conformément équivalente respectivement à \mathbb{C} , à un cylindre ou bien à un tore. Le dernier cas $X = \mathbb{D}$ est celui des surfaces non exceptionnelles. Nous avons dans ce cas le fait remarquable que les automorphismes conformes de \mathbb{D} sont exactement les isométries du *disque de Poincaré*, *i.e.* le disque unité \mathbb{D} muni de la métrique hyperbolique

$$\frac{4}{(1 - |z|^2)^2} |dz|^2.$$

Par conséquent, S peut être munie de la métrique hyperbolique via π , devenant ainsi une *surface hyperbolique*. Mentionnons encore que les éléments de $\text{Conf}(\mathbb{D})$ sont classifiés par leurs points fixes dans l'adhérence de \mathbb{D} dans \mathbb{C} , à savoir : $g \in \text{Conf}(\mathbb{D})$ est *g elliptique* (un unique point fixe dans \mathbb{D}), *g parabolique* (un unique point fixe sur le bord de \mathbb{D}) ou bien *hyperbolique* (deux points fixes sur le bord de \mathbb{D}). Le groupe $\text{Deck}(S)$ ne contient donc aucun élément elliptique. De plus, si S est compacte alors $\text{Deck}(S)$ ne contient que des éléments hyperboliques et son genre est $n_S \geq 2$.

Le Problème classique

Soit S une surface de Riemann compacte de genre $n_S \geq 0$. D'une part, S est conformément équivalente à la surface de Riemann d'une fonction algébrique $A \in \mathbb{C}[z, w]$. D'autre part, le

Théorème d'uniformisation de Koebe-Poincaré implique que S est conformément équivalente à la surface quotient $X/\text{Deck}(S)$ avec $X \in \{\widehat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{D}\}$. Le problème classique de l'uniformisation des surfaces de Riemann est alors de lier *explicitement* ces deux descriptions.

Dans le présent travail, nous nous intéressons au cas où S est hyperelliptique. Pour une telle surface, donnée comme le quotient de son revêtement universel X par l'action de son groupe d'applications de revêtement $\text{Deck}(S)$, nous nous intéressons à la description explicite d'un polynôme $A \in \mathbb{C}[z, w]$ tel que sa courbe algébrique associée \mathcal{C}_A soit conformément équivalente à S , ainsi qu'à la description explicite d'une paramétrisation uniforme $\mathcal{P} : X \rightarrow \mathcal{C}_A$.

Si $n_S = 0$, S admet $\widehat{\mathbb{C}}$ comme revêtement universel et est conformément équivalente à $\widehat{\mathbb{C}}$. Le problème de l'uniformisation est dans ce cas trivialement résolu.

Si $n_S = 1$, S admet \mathbb{C} comme revêtement universel et $\text{Deck}(S)$ correspond - à automorphisme conforme de \mathbb{C} près - au réseau

$$\Lambda_\tau = \{n + m\tau \mid n, m \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$$

pour un $\tau \in \mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$. Ainsi, S est conformément équivalente au tore \mathbb{C}/Λ_τ . Dans ce cas, la fonction $\wp : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ de Weierstrass associée au réseau Λ_τ et définie par

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda_\tau \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right), \quad z \in \mathbb{C},$$

nous donne explicitement une courbe algébrique \mathcal{C}_A conformément équivalente à S ainsi qu'une paramétrisation uniforme $\mathcal{P} : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{C}_A$. Nous obtenons

$$\mathcal{C}_A = \{(z, w) \in \widehat{\mathbb{C}} \times \widehat{\mathbb{C}} \mid A(z, w) = 0\}$$

où le polynôme $A \in \mathbb{C}[z, w]$ est défini par

$$A(z, w) = w^2 - 4(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)$$

avec

$$a_1 = \wp\left(\frac{1}{2}\right), \quad a_2 = \wp\left(\frac{\tau}{2}\right), \quad a_3 = \wp\left(\frac{1+\tau}{2}\right).$$

Une paramétrisation uniforme de \mathcal{C}_A est donnée par l'application Λ_τ -équivariante

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathcal{C}_A \\ z &\longmapsto (\wp(z), \wp'(z)) \end{aligned}$$

où \wp' est la dérivée de \wp .

Si $n_S \geq 2$, alors S admet \mathbb{D} comme revêtement universel et $\text{Deck}(S)$ est un groupe d'éléments hyperboliques de $\text{Conf}(\mathbb{D})$ agissant proprement discontinûment et sans points fixes sur \mathbb{D} . La méthode d'uniformisation conforme de Buser-Silhol s'applique aux surfaces de Riemann compactes de genre $n_S = 2$, genre pour lequel toutes les surfaces de Riemann compactes sont hyperelliptiques. Nous considérerons dès à présent que de telles surfaces sont toujours munies de la métrique hyperbolique.

1.3 Méthode d'uniformisation conforme de Buser-Silhol

Dans cette section, nous présentons la méthode développée par Peter Buser et Robert Silhol pour l'uniformisation conforme des surfaces de Riemann compactes de genre 2. Cette section est essentiellement basée sur l'article [BS05b]. Mentionnons toutefois que nous avons quelque peu adapté les énoncés des résultats de P. Buser et R. Silhol à nos notations et définitions.

Étant donné une surface de Riemann S compacte de genre 2, nous désirons trouver un polynôme $A \in \mathbb{C}[x, y]$ tel que la courbe algébrique \mathcal{C}_A associée soit conformément équivalente à S , ainsi qu'une paramétrisation uniforme $\mathcal{P} : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{C}_A$. La méthode de Buser-Silhol donne explicitement un tel polynôme et une telle paramétrisation via l'introduction d'une fonction holomorphe f_{BS} et d'un nombre complexe τ_{BS} donnés implicitement.

Définition 1.13 Un octogone géodésique hyperbolique $\mathcal{O} \subset \mathbb{D}$ est appelé *octogone admissible* pour la méthode d'uniformisation de Buser-Silhol si :

- i) il est non dégénéré (*i.e.* ses angles internes sont tous strictement positifs),
- ii) la somme de ses angles internes vaut 2π ,
- iii) il admet une symétrie centrale par rapport à l'origine $0 \in \mathbb{D}$,
- iv) deux de ses côtés opposés ont leur milieu hyperbolique sur le segment $] -1, 1[\subset \mathbb{D}$.

Le groupe G engendré par des isométries hyperboliques g_1, \dots, g_4 identifiant chacune deux côtés opposés de \mathcal{O} est appelé *groupe d'isométries associé* à \mathcal{O} .

Soient \mathcal{O} un octogone admissible et G son groupe d'isométries associé.

Nous notons consécutivement dans le sens trigonométrique positif m_1, \dots, m_8 les milieux hyperboliques des côtés de \mathcal{O} , en commençant par $m_1 \in]0, 1[$, ainsi que s_1, \dots, s_8 les sommets de \mathcal{O} , en commençant par s_1 le sommet compris entre m_1 et m_2 le long du bord de \mathcal{O} . Afin que la notation des isométries hyperboliques g_1, \dots, g_4 soit uniquement déterminée, nous les définissons de sorte que $g_i(m_{i+4}) = m_i$, $i = 1, \dots, 4$. La situation est illustrée par la Figure 1.1. Notons que tous les éléments du groupe G sont hyperboliques et que les flèches de la Figure 1.1 sont portées par les axes des générateurs g_1, \dots, g_4 .

Lemme 1.14

- a) Soit S une surface de Riemann compacte de genre 2. Alors il existe un octogone admissible \mathcal{O} tel que S soit conformément équivalente à \mathbb{D}/G , où G est le groupe d'isométries associé à \mathcal{O} .
- b) Soit \mathcal{O} un octogone admissible et G son groupe d'isométries associé. Alors \mathcal{O} est un domaine fondamental pour l'action de G sur \mathbb{D} , et \mathbb{D}/G est une surface hyperbolique fermée de genre 2.

Preuve. Le point a) est un résultat classique qui remonte à Fricke et Klein (cf. [FK65]). Le point b) est un cas particulier du Théorème du polyèdre de Poincaré (voir par exemple [Bea95, Théorème, 9.8.4]). \square

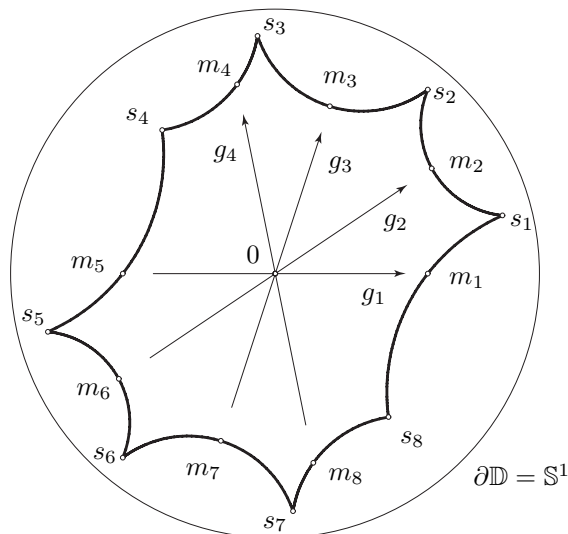


FIGURE 1.1. Octogone admissible $\mathcal{O} \subset \mathbb{D}$ et générateurs g_1, \dots, g_4 de son groupe d'isométries associées G .

Remarque 1.15 Soit \mathcal{O} un octogone admissible et G son groupe d'isométries associé. La multiplication par -1 dans \mathbb{D} est un relèvement de l'involution hyperelliptique φ_h de \mathbb{D}/G . Autrement dit, nous avons le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \xrightarrow{\cdot(-1)} & \mathbb{D} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{D}/G & \xrightarrow{\varphi_h} & \mathbb{D}/G \end{array}$$

Soient \mathcal{O} un octogone admissible et G son groupe d'isométries associé. Soient encore $h_i : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ le demi-tour autour du point milieu m_i , $i = 1, \dots, 8$, et G' le groupe engendré par les éléments g_1, g_3 et h_2, h_4, h_6, h_8 . Le groupe G' est appelé *groupe auxiliaire d'isométries* de \mathcal{O} . Un fait crucial dans la méthode d'uniformisation de Buser-Silhol est que non seulement l'octogone \mathcal{O} est un domaine fondamental pour l'action de G sur \mathbb{D} , mais c'est aussi un domaine fondamental pour l'action de G' sur \mathbb{D} . La situation est illustrée par la Figure 1.2.

Définition 1.16 Soient \mathcal{O} un octogone admissible, G son groupe d'isométries associé et G' son groupe auxiliaire d'isométries. Le triplet (\mathcal{O}, G, G') est appelé une *donnée pour l'uniformisation à la Buser-Silhol d'une surface hyperelliptique de genre 2*.

Nous mentionnerons dans la prochaine section comment construire, en pratique, une donnée pour l'uniformisation à la Buser-Silhol d'une surface hyperelliptique de genre 2.

Théorème 1.17 (Buser-Silhol) Soit (\mathcal{O}, G, G') une donnée pour l'uniformisation à la Buser-Silhol d'une surface hyperelliptique de genre 2. Alors il existe un unique $\tau_{\text{BS}} \in \mathbb{H}$ et une unique fonction holomorphe $f_{\text{BS}} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ tels que :

- i) f_{BS} est impaire,

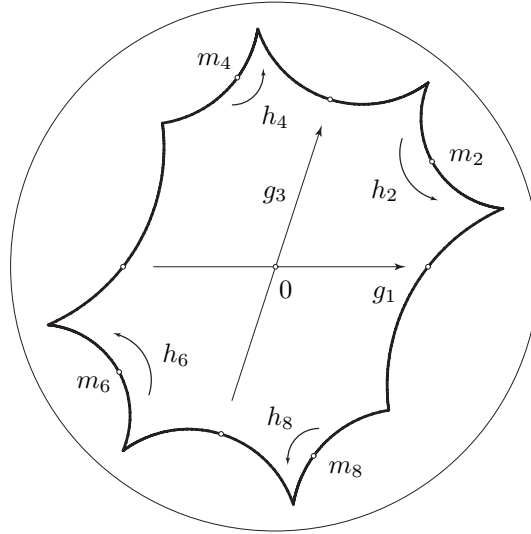


FIGURE 1.2. Octogone admissible $\mathcal{O} \subset \mathbb{D}$ et générateurs $g_1, g_2, h_2, h_4, h_6, h_8$ de son groupe auxiliaire d'isométries G' .

- ii) f_{BS} est conforme sur \mathbb{D} sauf sur les G -orbites (ou G' -orbites) des points m_{2i} , $i = 1, \dots, 4$, et $f_{\text{BS}}(z) - f_{\text{BS}}(m_{2i})$ est exactement d'ordre 2 aux points m_{2i} ,
- iii) $f_{\text{BS}}(g_1(z)) = f_{\text{BS}}(z) + 2$ sur \mathbb{D} ,
- iv) $f_{\text{BS}}(g_3(z)) = f_{\text{BS}}(z) + 2\tau_{\text{BS}}$ sur \mathbb{D} ,
- v) $f_{\text{BS}}(h_{2i}(z)) = f_{\text{BS}}(z)$ sur \mathbb{D} , $i = 1, \dots, 4$.

Preuve. Cf. [BS05b, Lemma 1.1]. \square

Définition 1.18 Le quintuplet $(\mathcal{O}, G, G'; f_{\text{BS}}, \tau_{\text{BS}})$ est appelé une *uniformisation à la Buser-Silhol* d'une surface hyperelliptique de genre 2, et les six relations iii), iv) et v) du Théorème 1.17 sont appelées les *relations de périodicité* associées à $(\mathcal{O}, G, G'; f_{\text{BS}}, \tau_{\text{BS}})$.

Remarque 1.19 Soit $(\mathcal{O}, G, G'; f_{\text{BS}}, \tau_{\text{BS}})$ un élément pour l'uniformisation à la Buser-Silhol d'une surface hyperelliptique de genre 2. Du Théorème 1.17 et de sa preuve découlent les remarques suivantes.

- 1) \mathbb{D}/G' est une surface de Riemann compacte de genre 1 conformément équivalente à $\mathbb{C}/\Lambda_{\tau_{\text{BS}}}$ où $\Lambda_{\tau_{\text{BS}}} \subset \mathbb{C}$ est le réseau engendré par 2 et $2\tau_{\text{BS}}$. En réalité, la fonction f_{BS} n'est autre que le relèvement de la projection canonique $\pi_1 : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}/G'$ au revêtement universel conforme $\pi_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}/G'$ vérifiant $f_{\text{BS}}(0) = 0$. Nous avons donc le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathbb{C} \\
 & \nearrow f_{\text{BS}} & \downarrow \pi_2 \\
 \mathbb{D} & \xrightarrow{\pi_1} & \mathbb{D}/G'
 \end{array}$$

- 2) La fonction f_{BS} n'est pas un polynôme. En effet, l'ensemble $\{g^r(0) \mid g = h_4 \circ h_2 \text{ et } r \in \mathbb{Z}\}$ admet une infinité d'éléments distincts, chacun annulant f_{BS} . Si f_{BS} était un polynôme, f_{BS} devrait donc être identiquement nulle.
- 3) La fonction f_{BS} vérifie

$$f_{\text{BS}}(0) = 0, \quad f_{\text{BS}}(m_1) = 1, \quad f_{\text{BS}}(s_1) = 1 + \tau_{\text{BS}} \quad \text{et} \quad f_{\text{BS}}(m_3) = \tau_{\text{BS}}.$$

- 4) Les points de Weierstrass (points fixés par l'involution hyperelliptique) sont

$$\pi(0), \pi(s_i), \pi(m_1), \pi(m_2), \pi(m_3), \pi(m_4)$$

où $\pi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}/G$ est la projection canonique.

Pour le calcul d'approximations numériques de $(\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$, P. Buser et R. Silhol utilisent la caractérisation de $(\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$ suivante.

Théorème 1.20 (Buser-Silhol) *Soit $(\mathcal{O}, G, G'; f_{\text{BS}}, \tau_{\text{BS}})$ un élément pour l'uniformisation à la Buser-Silhol d'une surface hyperelliptique de genre 2. Considérons une fonction holomorphe \tilde{f} définie sur un voisinage ouvert D de l'octogone \mathcal{O} . S'il existe $\tilde{\tau} \in \mathbb{C}$ tel que les conditions suivantes soient vérifiées :*

- i) \tilde{f} est impaire,
 - ii) $\tilde{f}(g_1(z)) = \tilde{f}(z) + 2$ sur l'arc géodésique $[s_4, s_5]_h$,
 - iii) $\tilde{f}(g_3(z)) = \tilde{f}(z) + 2\tilde{\tau}$ sur l'arc géodésique $[s_6, s_7]_h$,
 - iv) $\tilde{f}(h_{2i}(z)) = \tilde{f}(z)$ sur l'arc géodésique $[s_{2i-1}, s_{2i}]_h$, pour $i = 1, 2$,
- alors $\tilde{f} = f_{\text{BS}}|_D$ et $\tilde{\tau} = \tau_{\text{BS}}$.

Preuve. Cf. [BS05b, Lemma 1.2]. \square

Avant d'énoncer le résultat de P. Buser et R. Silhol (Théorème 4.11) qui décrit un polynôme dont la courbe algébrique associée est conformément équivalente à la surface de Riemann compacte de genre 2 associée à un octogone admissible donné, nous introduisons encore quelques définitions nécessaires. Soient $\Lambda_{\tau_{\text{BS}}} \subset \mathbb{C}$ le réseau euclidien engendré par 2 et $2\tau_{\text{BS}}$, et $T_{\tau_{\text{BS}}} : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ une fonction méromorphe paire $\Lambda_{\tau_{\text{BS}}}$ -périodique. P. Buser et R. Silhol ont choisi la fonction définie par

$$T_{\tau_{\text{BS}}}(z) = -\frac{w}{K} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{(w - \zeta^{2k})^2 (1 - \zeta^{2k+2} w)^2}{(w - \zeta^{2k+1})^2 (1 - \zeta^{2k+1} w)^2}, \quad z \in \mathbb{C},$$

où $\zeta = \exp(\pi i \tau_{\text{BS}})$, $w = \exp(\pi i z)$ et $K = 4 \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(1+\zeta)^{2k}}{(1+\zeta)^{2k-1}} \right)^4$. Cette fonction est normalisée de sorte que $T_{\tau_{\text{BS}}}(0) = 0$, $T_{\tau_{\text{BS}}}(1) = 1$ et $T_{\tau_{\text{BS}}}(\tau_{\text{BS}}) = \infty$. Cette fonction-là a été choisie car une approximation suffisamment précise de $T_{\tau_{\text{BS}}}$ est obtenue en tronquant les produits après quelques dizaines de termes. Théoriquement toutefois, n'importe quelle autre fonction méromorphe paire $\Lambda_{\tau_{\text{BS}}}$ -périodique aurait fait l'affaire, comme par exemple la fonction \wp de Weierstrass.

Théorème 1.21 (Buser-Silhol) *Soient $(\mathcal{O}, G, G'; f_{\text{BS}}, \tau_{\text{BS}})$ une uniformisation à la Buser-Silhol d'une surface hyperelliptique de genre 2 et $F_{\text{BS}} : \mathbb{D} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ la fonction méromorphe définie par $F_{\text{BS}} = T_{\tau_{\text{BS}}} \circ f_{\text{BS}}$. Alors :*

- i) F_{BS} est G -équivariante.
 ii) La surface hyperbolique fermée de genre deux \mathbb{D}/G est conformément équivalente à la courbe algébrique \mathcal{C}_A associée au polynôme $A \in \mathbb{C}[x, y]$ défini par

$$A(x, y) = y^2 - x(x-1)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$$

où $a_1 = F_{\text{BS}}(s_i)$, $a_2 = F_{\text{BS}}(m_2)$ et $a_3 = F_{\text{BS}}(m_4)$.

- iii) L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \mathbb{D} &\longrightarrow \mathcal{C}_A \\ z &\longmapsto (x(z), y(z)) \end{aligned}$$

où les fonctions méromorphes G -équivariantes $x, y : \mathbb{D} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ sont définies par

$$x(z) = F_{\text{BS}}(z),$$

$$y(z) = \sqrt{F_{\text{BS}}(z)(F_{\text{BS}}(z) - 1)(F_{\text{BS}}(z) - a_1)(F_{\text{BS}}(z) - a_2)(F_{\text{BS}}(z) - a_3)}$$

est une paramétrisation uniforme de la courbe algébrique \mathcal{C}_A .

Preuve. Cf. [BS05b, Proposition 1.4]. \square

Remarque 1.22

- a) La fonction F_{BS} est un relèvement de la projection hyperelliptique π_h . Autrement dit, nous avons le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \xrightarrow{f_{\text{BS}}} & \mathbb{C} \\ \pi \downarrow & \searrow F_{\text{BS}} & \downarrow T_{\tau_{\text{BS}}} \\ \mathbb{D}/G & \xrightarrow{\pi_h} & \hat{\mathbb{C}} \end{array}$$

- b) Dans le Chapitre 4, nous reviendrons en détail sur les démonstrations des résultats de P. Buser et R. Silhol énoncés ci-dessus lors de la généralisation de ceux-ci aux surfaces de Riemann hyperelliptique de genre $n \geq 2$.

1.4 Méthode d'approximation de Buser-Silhol

Soit $(\mathcal{O}, G, G'; \tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$ une uniformisation à la Buser-Silhol d'une surface de Riemann hyperelliptique de genre 2. Le nombre complexe τ_{BS} et la fonction f_{BS} étant donnés implicitement (Théorème 1.17), le problème est alors de les estimer. Nous présentons dans cette section la méthode d'approximation pour τ_{BS} et f_{BS} développée par P. Buser et R. Silhol et décrite dans [BS05b] et [BS05a].

Donnée de (\mathcal{O}, G, G')

Pour la donnée explicite d'un octogone admissible (via ses sommets s_1, \dots, s_8), P. Buser et R. Silhol utilisent les paramètres de longueur l_i et de *twist* tw_i de Fenchel-Nielsen

$$(l_1, tw_1, l_2, tw_2, l_3, tw_3) \in (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})^3$$

associés à la partition d'une surface de Riemann compacte S de genre 2 en deux pantalons (topologiquement deux sphères auxquelles trois disques disjoints ont été enlevés) dont les bords $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont des géodésiques fermées simples non séparantes (*i.e.* $S \setminus \alpha_i$ connexe) et deux à deux disjointes. Ils construisent alors deux octogones admissibles \mathcal{O}_1 (type *Octo1*) et \mathcal{O}_2 (type *Octo2*) pour les mêmes paramètres de Fenchel-Nielsen. Soient G_i le groupe d'isométries associé à \mathcal{O}_i et $\pi_i : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}/G_i$ la projection canonique. Notons $\tilde{\alpha}_1^1 \cup \tilde{\alpha}_1^2$ la préimage de α_1 dans \mathcal{O}_1 , $\tilde{\alpha}_2^1 \cup \tilde{\alpha}_2^2$ celle de α_2 et $\tilde{\alpha}_3$ celle de α_3 , et notons de manière similaire les préimages dans \mathcal{O}_2 . La situation est illustrée dans la Figure 1.3.

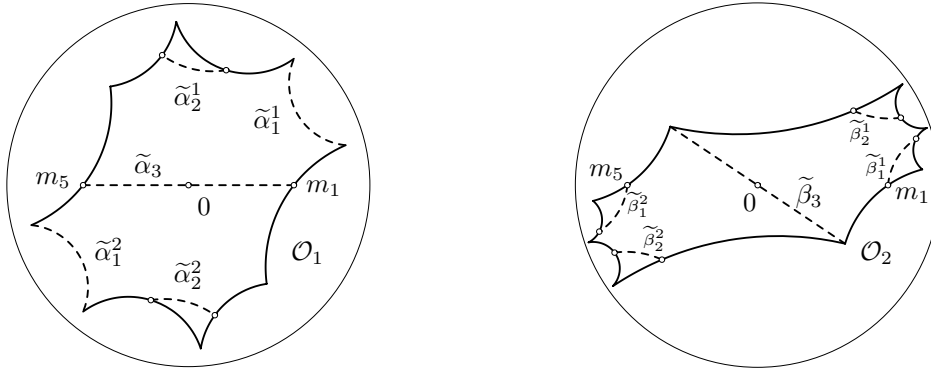


FIGURE 1.3. Octogones admissibles de type *Octo1* et de type *Octo2* correspondant aux paramètres de Fenchel-Nielsen $(3, 0.4, 2, -0.3, 2, -0.1)$ et préimages de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ dans les octogones respectifs.

Nous avons en particulier

$$\begin{aligned} \pi_1(\tilde{\alpha}_1^1) = \pi_1(\tilde{\alpha}_1^2) = \alpha_1, \quad \pi_1(\tilde{\alpha}_2^1 \cup \tilde{\alpha}_2^2) = \alpha_2, \quad \pi_1(\tilde{\alpha}_3) = \alpha_3, \\ \pi_2(\tilde{\beta}_1^1 \cup \tilde{\beta}_1^2) = \alpha_1, \quad \pi_2(\tilde{\beta}_2^1 \cup \tilde{\beta}_2^2) = \alpha_2, \quad \pi_2(\tilde{\beta}_3) = \alpha_3, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{1}{2} \ell(\alpha_1) = \frac{1}{2} \ell_{\mathbb{D}}(\tilde{\alpha}_1^1) = \frac{1}{2} \ell_{\mathbb{D}}(\tilde{\alpha}_1^2) = \ell_{\mathbb{D}}(\tilde{\beta}_1^1) = \ell_{\mathbb{D}}(\tilde{\beta}_1^2), \\ l_2 &= \frac{1}{2} \ell(\alpha_2) = \ell_{\mathbb{D}}(\tilde{\alpha}_2^1) = \ell_{\mathbb{D}}(\tilde{\alpha}_2^2) = \ell_{\mathbb{D}}(\tilde{\beta}_2^1) = \ell_{\mathbb{D}}(\tilde{\beta}_2^2), \\ l_3 &= \frac{1}{2} \ell(\alpha_3) = \frac{1}{2} \ell_{\mathbb{D}}(\tilde{\alpha}_3) = \frac{1}{2} \ell_{\mathbb{D}}(\tilde{\beta}_3), \end{aligned}$$

où $\ell(\cdot)$ est la longueur hyperbolique dans $S = \mathbb{D}/G_1 = \mathbb{D}/G_2$ et $\ell_{\mathbb{D}}(\cdot)$ la longueur dans le disque de Poincaré.

Pour les détails de la construction, à partir des paramètres de Fenchel-Nielsen, d'un octogone admissible \mathcal{O} , des générateurs de son groupe d'isométries associé G et des générateurs de son

groupe auxiliaire d'isométries G' , se référer à [BS05b, Section 2] (et pour un exposé général sur les paramètres de Fenchel-Nielsen voir par exemple [Bus92, Section 1.7 et Chapitre 3]). Une discussion détaillée sur différentes descriptions d'un octogone admissible et de l'espace de Teichmüller des surfaces de Riemann compactes de genre 2 est présentée dans l'article d'Aigon-Dupuy, Buser *et al.* [ADBC⁺05].

Problème de minimisation

P. Buser et R. Silhol utilisent la caractérisation de $(\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$ par les relations de périodicité (Théorème 1.20) et le fait que la fonction holomorphe impaire $f_{\text{BS}} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ possède un développement en série de Taylor $f_{\text{BS}}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j z^{2j-1}$ convergeant uniformément localement sur \mathbb{D} . Ils approchent τ_{BS} et f_{BS} par un nombre complexe τ_n^M et un polynôme impair $p_n^M \in \mathbb{C}[z]$ de degré $2n - 1$ qui minimisent la quantité

$$M \cdot RN_{\sigma^M}(\tau_n^M, p_n^M) = \sum_{k=1}^M \left\{ |p_n^M(g_1(z_{1,k}^M)) - p_n^M(z_{1,k}^M) - 2|^2 + |p_n^M(h_2(z_{2,k}^M)) - p_n^M(z_{2,k}^M)|^2 \right. \\ \left. + |p_n^M(g_3(z_{3,k}^M)) - p_n^M(z_{3,k}^M) - 2\tau_n^M|^2 + |p_n^M(h_4(z_{4,k}^M)) - p_n^M(z_{4,k}^M)|^2 \right\}.$$

Le choix des points $\sigma^M = \{\{z_{i,k}^M\}_{k=1}^M\}_{i=1}^4$ sera expliqué au prochain paragraphe. (Nous reviendrons en détail sur la fonctionnelle RN_{σ^M} à la Section 3.4). En posant $p_n^M(z) = \sum_{j=1}^n b_j^M z^{2j-1}$, cela revient à dire que (τ_n^M, p_n^M) est solution au sens des moindres carrés du système linéaire surdéterminé à $4M$ équations et $n + 1$ inconnues

$$A_{4M \times (n+1)} b_{(n+1) \times 1} = d_{4M \times 1}$$

avec A, b, d définis dans la Table 1.4. Pour la résolution de ce système, P. Buser et R. Silhol ont développé un *package* Maple (cf. [BS05a]) utilisant une routine standard pour la résolution au sens des moindres carrés du système linéaire surdéterminé donné ci-dessus (à savoir, la méthode de décomposition en valeurs singulières de la matrice A , voir par exemple [TB97]).

Remarque 1.23 En réalité, P. Buser et R. Silhol incorporent aussi les six conditions suivantes dans leur problème de minimisation

$$f_{\text{BS}}(m_1) = 1, \quad f_{\text{BS}}(s_1) = 1 + \tau_{\text{BS}}, \quad f_{\text{BS}}(s_2) = 1 + \tau_{\text{BS}}, \\ f_{\text{BS}}(m_3) = \tau_{\text{BS}}, \quad f_{\text{BS}}(s_3) = -1 + \tau_{\text{BS}}, \quad f_{\text{BS}}(s_4) = -1 + \tau_{\text{BS}}.$$

Nous ne les incorporons pas dans le modèle d'analyse fonctionnelle que nous développons à la Section 3.4, car ces conditions découlent des relations de périodicité et donc leur influence décroît lorsque M croît.

Sélection des points sur les arcs

Les points $\{\{z_{i,k}^M\}_{k=1}^M\}_{i=1}^4$ du système linéaire donné ci-dessus sont choisis sur les côtés de l'octogone \mathcal{O} . Plus précisément, le choix est tel que $\{z_{i,k}^M\}_{k=1}^M \subset \gamma_i$, $i = 1, \dots, 4$, où les γ_i sont les arcs géodésiques suivants

$$\gamma_1 = [s_4, m_5]_h, \quad \gamma_2 = [s_1, m_2]_h, \quad \gamma_3 = [s_6, m_7]_h, \quad \gamma_4 = [s_3, m_4]_h,$$

TABLE 1.4. *Éléments du système linéaire $Ab = d$, où seules les M premières composantes de d sont égales à 2.*

$A =$	0	$g_1(z_{1,1}^M) - z_{1,1}^M$	$g_1(z_{1,1}^M)^3 - (z_{1,1}^M)^3$	\dots	$g_1(z_{1,1}^M)^{2n-1} - (z_{1,1}^M)^{2n-1}$
	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
	0	$g_1(z_{1,M}^M) - z_{1,M}^M$	$g_1(z_{1,M}^M)^3 - (z_{1,M}^M)^3$	\dots	$g_1(z_{1,M}^M)^{2n-1} - (z_{1,M}^M)^{2n-1}$
	0	$h_2(z_{2,1}^M) - z_{2,1}^M$	$h_2(z_{2,1}^M)^3 - (z_{2,1}^M)^3$	\dots	$h_2(z_{2,1}^M)^{2n-1} - (z_{2,1}^M)^{2n-1}$
	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
	0	$h_2(z_{2,M}^M) - z_{2,M}^M$	$h_2(z_{2,M}^M)^3 - (z_{2,M}^M)^3$	\dots	$h_2(z_{2,M}^M)^{2n-1} - (z_{2,M}^M)^{2n-1}$
	-2	$g_3(z_{3,1}^M) - z_{3,1}^M$	$g_3(z_{3,1}^M)^3 - (z_{3,1}^M)^3$	\dots	$g_3(z_{3,1}^M)^{2n-1} - (z_{3,1}^M)^{2n-1}$
	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
	-2	$g_3(z_{3,M}^M) - z_{3,M}^M$	$g_3(z_{3,M}^M)^3 - (z_{3,M}^M)^3$	\dots	$g_3(z_{3,M}^M)^{2n-1} - (z_{3,M}^M)^{2n-1}$
	0	$h_4(z_{4,1}^M) - z_{4,1}^M$	$h_4(z_{4,1}^M)^3 - (z_{4,1}^M)^3$	\dots	$h_4(z_{4,1}^M)^{2n-1} - (z_{4,1}^M)^{2n-1}$
	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
	0	$h_4(z_{4,M}^M) - z_{4,M}^M$	$h_4(z_{4,M}^M)^3 - (z_{4,M}^M)^3$	\dots	$h_4(z_{4,M}^M)^{2n-1} - (z_{4,M}^M)^{2n-1}$

$b = \begin{pmatrix} \tau_n^M & b_1^M & b_2^M & \dots & b_n^M \end{pmatrix}^T$
 $d = \begin{pmatrix} 2 & \dots & 2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}^T$

avec $[x, y]_h$ dénotant le segment hyperbolique reliant x et y . Ces quatre arcs sont illustrés dans la Figure 1.5.

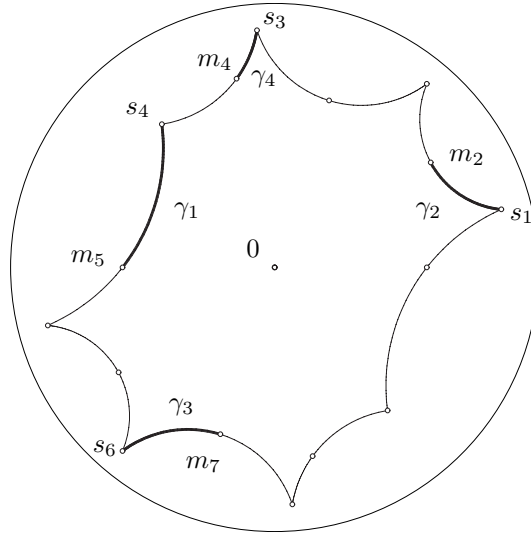


FIGURE 1.5. Arcs géodésiques $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ (trait gras) portant les points sur lesquels repose le problème de minimisation.

Sur chaque arc γ_i , M points sont choisis de la manière suivante. Pour $c \in \mathbb{D}$, notons $g_c : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ l'isométrie hyperbolique définie par

$$g_c(z) = \frac{z - c}{-\bar{c}z + 1}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Remarquons en particulier que g_c envoie c sur 0 , et envoie tout arc géodésique passant par c sur un segment euclidien passant par 0 . L'ensemble $\{z_{1,k}^M\}_{k=1}^M$ est, en fait, la subdivision de l'arc γ_1 obtenue comme l'image par $g_{m_5}^{-1}$ de la subdivision euclidienne régulière du segment $[0, g_{m_5}(s_4)]_h$. Autrement dit, cette subdivision est donnée par

$$z_{1,k}^M = g_{m_5}^{-1} \left(\frac{k}{M} g_{m_5}(s_4) \right), \quad k = 1, \dots, M.$$

La Figure 1.6 illustre cette construction. Les subdivisions des arcs $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ sont construites de manière similaire (cf. Figure 1.7).

Quelques remarques sur l'aspect numérique

Dans des cas où le polynôme associé à une courbe algébrique conformément équivalente à \mathbb{D}/G est connu, la méthode d'approximation de Buser-Silhol donne des approximations numériques très précises (cf. [BS05a]). Toutefois, lorsque l'octogone admissible possède des sommets très proches de $\partial\mathbb{D}$, ces approximations deviennent en général très mauvaises, voire inutilisables (cf. Section 1.5). Suite aux nombreuses expérimentations numériques effectuées, nous dirons qu'un octogone admissible est *mal conditionné numériquement* pour la méthode d'approximation de Buser-Silhol s'il possède des sommets de valeur absolue supérieure à 0.99. Les

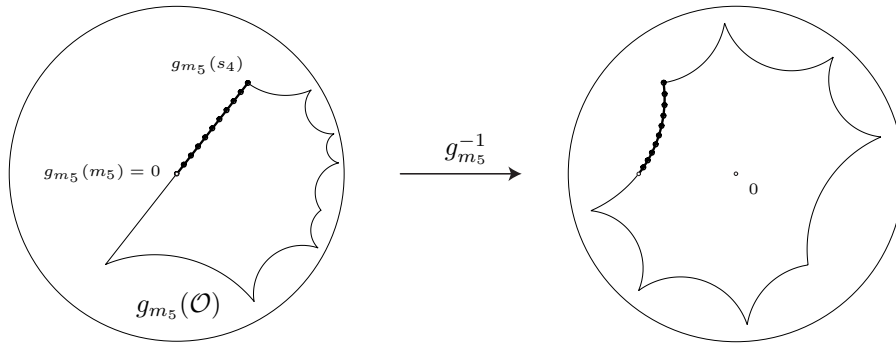


FIGURE 1.6. Construction de la subdivision $\{z_{1,k}^M\}_{k=1}^M$ de l'arc γ_1 (cas $M = 10$).

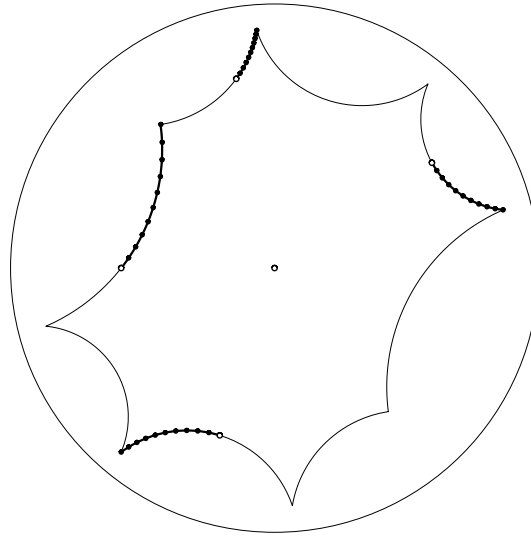


FIGURE 1.7. Subdivision des quatre arcs sur laquelle repose le problème de minimisation (cas $M = 10$).

conséquences de ce mauvais conditionnement numérique semblent provenir de la conjugaison des trois facteurs suivants.

Le premier facteur est lié à la manière d'approcher f_{BS} . En effet, la méthode d'approximation de Buser-Silhol est basée sur le fait que la fonction holomorphe f_{BS} admet un développement en série de Taylor $f_{\text{BS}}(z) = \sum_1^\infty b_j z^{2j-1}$ qui converge uniformément localement sur \mathbb{D} . Lorsque l'octogone possède des sommets très proches de $\partial\mathbb{D}$, nous ne pouvons donc pas nous attendre, *a priori*, à une convergence rapide de cette série sur \mathbb{D} tout entier et en particulier au voisinage de $\partial\mathbb{D}$.

Le deuxième facteur est inhérent à un phénomène lié aux applications conformes et est appelé *crowding* (notion introduite par Menikoff et Zemach dans [MZ80]). Le phénomène de *crowding* apparaît lorsque l'application conforme distord de manière importante le bord du domaine, ce qui présente le risque d'une perte significative de la précision de son approximation numérique. Ce phénomène peut aussi apparaître lorsque le domaine est mince et allongé.

Dans notre cas, la restriction de f_{BS} à l'intérieur de l'octogone \mathcal{O} est conforme et, par définition, f_{BS} distord fortement $\partial\mathcal{O}$ au voisinage - entre autres - des points m_2, m_4 (les points fixes de h_2 et h_4 respectivement), dont les images par F_{BS} nous donnent les coefficients a_2, a_3 du polynôme associé à la courbe algébrique conformément équivalente à \mathbb{D}/G (cf. Théorème 4.11). La fonction f_{BS} est donc sujette au phénomène de *crowding*, et ses approximations, à ses conséquences numériques.

Le troisième facteur est le nombre de chiffres significatifs utilisé par l'arithmétique à virgule flottante du logiciel d'expérimentation numérique, dans notre cas le logiciel Maple, ainsi que le compromis à faire entre la précision voulue et le temps de calcul nécessaire.

En plus de démontrer des résultats de convergence de la méthode d'uniformisation de Buser-Silhol (Chapitre 3), le but de ce travail de thèse est de proposer une méthode de décomposition d'octogones et d'adapter en conséquence la méthode d'approximation de Buser-Silhol afin de remédier, dans une certaine mesure, à l'altération de la qualité des approximations (τ_n^M, p_n^M) due au mauvais conditionnement numérique général des octogones admissibles (Chapitre 5).

1.5 Exemples numériques

Dans cette section, nous présentons plusieurs exemples numériques illustrant certaines des possibilités et des limites de la méthode d'approximation de Buser-Silhol. Étant donné une uniformisation à la Buser-Silhol $(\mathcal{O}, G, G'; \tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$ de la surface hyperelliptique de genre 2 \mathbb{D}/G , nous calculons une approximation (τ_n^M, p_n^M) de $(\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$, avec $\tau_n^M \in \mathbb{C}$ et $p_n^M \in \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$, ainsi qu'une approximation $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3 \in \mathbb{C}$ des coefficients a_1, a_2, a_3 du polynôme

$$A(x, y) = y^2 - x(x-1)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3),$$

de sorte que la courbe algébrique associée \mathcal{C}_A soit conformément équivalente à \mathbb{D}/G . Rappelons que les coefficients a_1, a_2, a_3 appartiennent à $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$ et sont deux à deux distincts.

Pour juger de la qualité des approximations $\tau_n^M, p_n^M, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3$, nous utilisons trois indicateurs. Le premier est le résidu normalisé, RN , défini comme le résidu, issu de la résolution au sens des moindres carrés du problème de minimisation décrit ci-dessus, divisé par la racine carrée de M . Intuitivement, plus RN est petit, plus l'approximation (τ_n^M, p_n^M) devrait être proche de $(\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$. Une justification plus précise apparaîtra à la Section 3.4. Le deuxième indicateur, présenté sous forme graphique, est la taille de la valeur absolue des coefficients b_j^M du polynôme d'approximation

$$p_n^M(z) = \sum_{j=1}^M b_j^M z^{2j-1}.$$

Cet indicateur nous donne des informations sur la stabilité de l'approximation polynomiale. Une information concernant cette stabilité - information certes plus grossière - nous est donnée par l'image $p_n^M(\mathcal{O})$. Comme troisième indicateur, nous utilisons les invariants d'Igusa et le résultat (cf. [Igu60, Corollary, p. 632]) qui affirme que deux courbes algébriques (sur \mathbb{C}) de

genre 2 sont conformément équivalentes si et seulement si leurs invariants d'Igusa sont égaux.

Les approximations sont calculées à l'aide de $4M$ points (M par arc) et de n fonctions de base, ici la base de $\mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$ constituée des n monômes $\{z, z^3, \dots, z^{2n-1}\}$. Nous avons utilisé le code Maple développé par P. Buser et R. Silhol dans [BS05a] en ayant toutefois adapté la partie concernant le calcul de l'approximation (τ_n^M, p_n^M) à nos besoins (cf. Remarque 1.23). Les approximations des invariants d'Igusa sont calculées via la routine Maple développée par P. Buser et R. Silhol dans [BS05a]. Tous nos calculs ont été effectués avec Maple 11 et Maple 13 (avec arithmétique à virgule flottante à 12 chiffres, soit $Digits := 12$) sous Windows XP Pro principalement sur un Lenovo X61 avec un Intel Core 2 Duo à 2 GHz et 0.97 Go de RAM et aussi sur un Dell Dimension 8300 avec un Pentium 4 à 2.8 GHz et 512 Mo de RAM et un Dell Dimension 5150 avec un Intel Pentium D à 2.8 GHz et 0.99 Go de RAM.

Nous avons effectué l'uniformisation numérique sur des représentants de deux familles de surfaces hyperelliptiques de genre 2 qui ne sont pas conformément équivalentes. Nos approximations sont basées sur $4M = 400$ points et $n = 200$ fonctions de base. Pour chaque surface, nous présentons une figure de l'octogone admissible \mathcal{O} et de son image $p_n^M(\mathcal{O}_1)$, une table contenant les approximations numériques de $\tau_{\text{BS}}, a_1, a_2, a_3$ accompagnées du résidu normalisé RN , et un graphique représentant la valeur absolue des coefficients de l'approximation p_n^M de f_{BS} . Pour chaque surface, nous notons \mathcal{C} la courbe algébrique conformément équivalente obtenue via l'uniformisation $(\mathcal{O}, G, G'; \tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$.

Pour la première famille, nous considérons :

- 1) L'uniformisation $(\mathcal{O}_1, G_1, G'_1; \tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$ avec \mathcal{O}_1 l'octogone de paramètres de Fenchel-Nielsen $(2, 0, 2, 0, 2, 0)$ obtenu via la décomposition de type *Octo1*. La surface \mathbb{D}/G_1 est la surface à 24 automorphismes conformes et, dans ce cas particulier, nous connaissons explicitement τ_{BS} et a_1, a_2, a_3 (cf. [BS05b, p. 131] et [BS05a]). Nous avons

$$\tau_{\text{BS}} = i, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 1.5, \quad a_3 = 3.$$

- 2) L'uniformisation $(\mathcal{O}_2, G_2, G'_2; \tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$ avec $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_1$, $G_2 = G_1$, mais nous prenons g_1, g_2 pour les isométries hyperboliques qui entrent dans la définition du groupe auxiliaire G'_2 . Ainsi, $G'_2 \neq G'_1$. Nous avons

$$\tau_{\text{BS}} = 1 + xi, \quad a_1 = -2, \quad a_2 = -0.5, \quad a_3 = -1,$$

où $x \in \mathbb{R}$ est un nombre (conjecturé être) algébrique que nous n'avons pas encore déterminé.

- 3) L'uniformisation $(\mathcal{O}_3, G_3, G'_3; \tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$ avec \mathcal{O}_3 l'octogone de paramètres de Fenchel-Nielsen $(2, 0, 2, 0, 2, 0)$ obtenu via la décomposition de type *Octo2*. Nous avons explicitement

$$\tau_{\text{BS}} = 0.5 + 0.5i, \quad a_1 = 0.5, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = -1.$$

Pour la seconde famille, nous considérons :

- 4) L'uniformisation $(\mathcal{O}_4, G_4, G'_4; \tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$ avec \mathcal{O}_4 l'octogone régulier. Nous avons explicitement

$$\tau_{\text{BS}} = i, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 1 + i, \quad a_3 = 1 - i.$$

- 5) L'uniformisation $(\mathcal{O}_5, G_5, G'_5; \tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$ avec \mathcal{O}_5 l'octogone obtenu à partir de \mathcal{O}_4 en ayant effectué certaines opérations sur les générateurs de G_4 .
- 6) L'uniformisation $(\mathcal{O}_6, G_6, G'_6; \tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$ avec \mathcal{O}_6 l'octogone obtenu - à nouveau - à partir de \mathcal{O}_4 en ayant effectué certaines opérations sur les générateurs de G_4 .

TABLE 1.8. *Approximations des invariants d'Igusa de $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$.*

	I_1	I_2
\mathcal{C}_1	$2133333.33334 - 1.09553161823 \times 10^{-15} i$	$28765.6821559 - 7.56774343035 \times 10^{-17} i$
\mathcal{C}_2	$2133333.33335 - 7.16888107949 \times 10^{-14} i$	$28765.6821563 - 1.92212250200 \times 10^{-15} i$
\mathcal{C}_3	$2133333.33333 - 6.89339542096 \times 10^{-14} i$	$28765.6821565 - 1.21990069543 \times 10^{-15} i$

	I_3	I_4
\mathcal{C}_1	$-2.11449839158 - 2.66044969068 \times 10^{-19} i$	$-3658674.16563 - 9.05399817030 \times 10^{-14} i$
\mathcal{C}_2	$-2.11449838609 - 1.10007083632 \times 10^{-18} i$	$-3658674.16326 - 9.07575978226 \times 10^{-14} i$
\mathcal{C}_3	$-2.11449839068 - 3.16358242111 \times 10^{-18} i$	$-3658674.16538 - 1.12977076250 \times 10^{-12} i$

TABLE 1.9. *Approximations des invariants d'Igusa de $\mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_6$.*

	I_1	I_2
\mathcal{C}_4	$49999.9999996 - 0.0000000260331660508 i$	$5932.61718760 - 0.00000000683804704909 i$
\mathcal{C}_5	$49999.9999988 - 0.00000129892300550 i$	$5932.61718760 - 0.000000100313452807 i$
\mathcal{C}_6	$49956.2811629 + 4.88245981609 i$	$5929.16630648 + 0.430092179991 i$

	I_3	I_4
\mathcal{C}_4	$-12.2070312539 - 3.83318287108 \times 10^{-11} i$	$-216120.970458 + 0.000000170722612556 i$
\mathcal{C}_5	$-12.2070312522 - 0.000000000447530206418 i$	$-216120.970452 + 0.00000434965241779 i$
\mathcal{C}_6	$-12.2176366137 + 0.00145912519914 i$	$-215946.510671 - 20.2460080456 i$

Uniformisation numérique de la surface associée à \mathcal{O}_1, G'_1 .

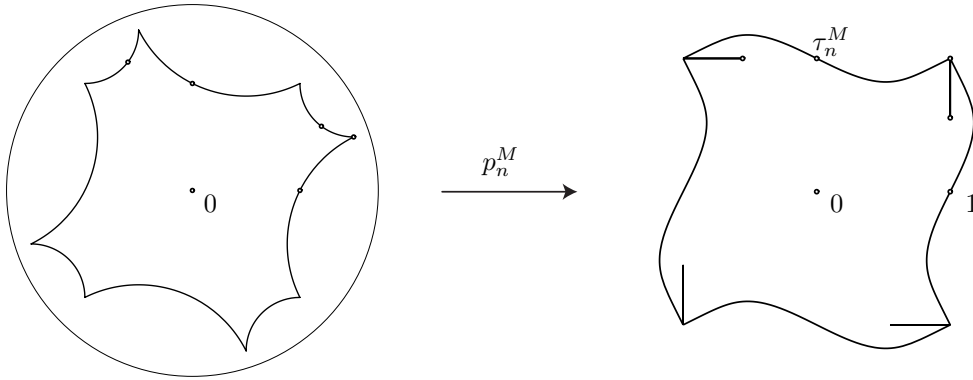


FIGURE 1.10. Octogone $\mathcal{O}_1 \subset \mathbb{D}$ et son image $p_n^M(\mathcal{O}_1) \subset \mathbb{C}$.

TABLE 1.11. Approximations basées sur l'octogone \mathcal{O}_1 et le groupe auxiliaire G'_1 .

τ_n^M	$2.61809795246437416 \times 10^{-12} + 1.00000000000322520 i$
\tilde{a}_1	$2.000000000001 - 1.14590985727 \times 10^{-11} i$
\tilde{a}_2	$1.500000000001 - 8.34568784396 \times 10^{-12} i$
\tilde{a}_3	$2.999999999992 - 2.42759771043 \times 10^{-11} i$
RN	$2.67437496945 \times 10^{-11}$

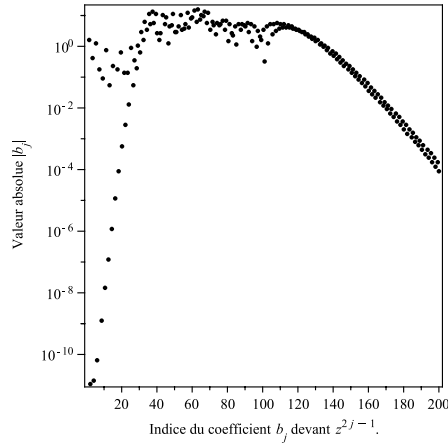


FIGURE 1.12. Graphique de la valeur absolue des coefficients du polynôme d'approximation p_n^M .

Uniformisation numérique de la surface associée à \mathcal{O}_2, G'_2 .

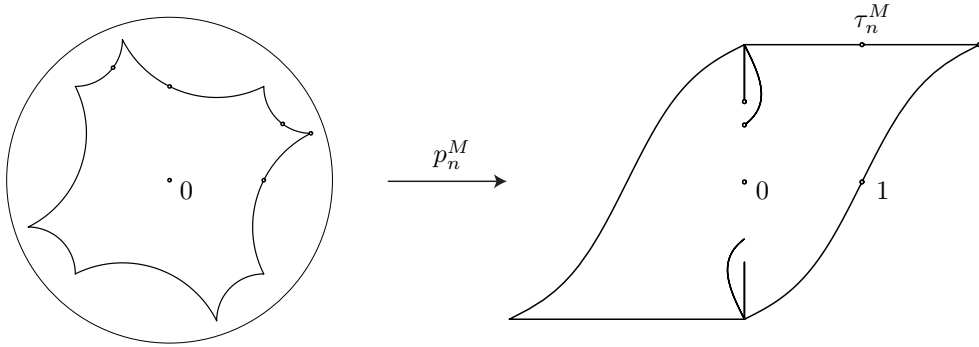


FIGURE 1.13. Octogone $\mathcal{O}_2 \subset \mathbb{D}$ et son image $p_n^M(\mathcal{O}_2) \subset \mathbb{C}$.

TABLE 1.14. Approximations basées sur l'octogone \mathcal{O}_2 et le groupe auxiliaire G'_2 .

τ_n^M	$0.9999999998148336 + 1.17015937725873996 i$
\tilde{a}_1	$-1.99999999966 - 0.000000000141761679232 i$
\tilde{a}_2	$-0.499999999988 - 1.15798301644 \times 10^{-11} i$
\tilde{a}_3	$-0.999999999974 - 2.79170209322 \times 10^{-11} i$
RN	$2.86868420783 \times 10^{-11}$

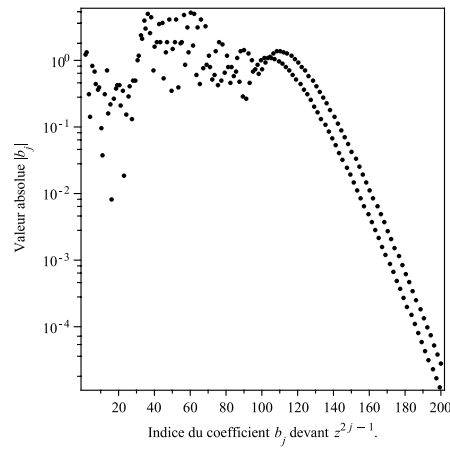


FIGURE 1.15. Graphique de la valeur absolue des coefficients du polynôme d'approximation p_n^M .

Uniformisation numérique de la surface associée \mathcal{O}_3, G'_3 .

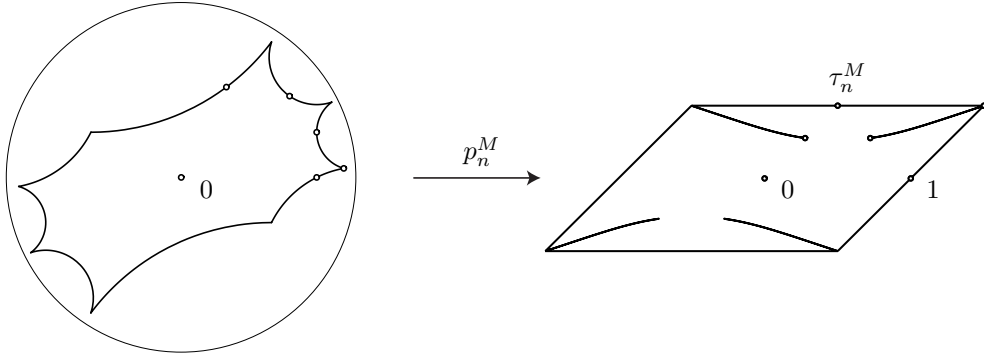


FIGURE 1.16. Octogone $\mathcal{O}_3 \subset \mathbb{D}$ et son image $p_n^M(\mathcal{O}_3) \subset \mathbb{C}$.

TABLE 1.17. Approximations basées sur l'octogone \mathcal{O}_3 et le groupe auxiliaire G'_3 .

τ_n^M	$0.49999999970428876 + 0.500000000019169000 i$
\tilde{a}_1	$0.5000000000065 - 4.19501989812 \times 10^{-11} i$
\tilde{a}_2	$1.99999999995 - 0.000000000399452383089 i$
\tilde{a}_3	$-1.00000000014 + 1.85773256052 \times 10^{-12} i$
RN	$4.34301997981 \times 10^{-11}$

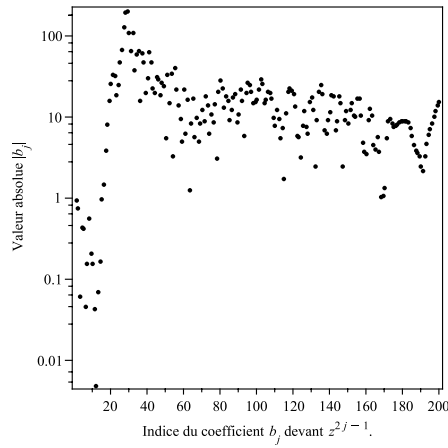


FIGURE 1.18. Graphique de la valeur absolue des coefficients du polynôme d'approximation p_n^M .

Uniformisation numérique de la surface associée à \mathcal{O}_4, G'_4 .

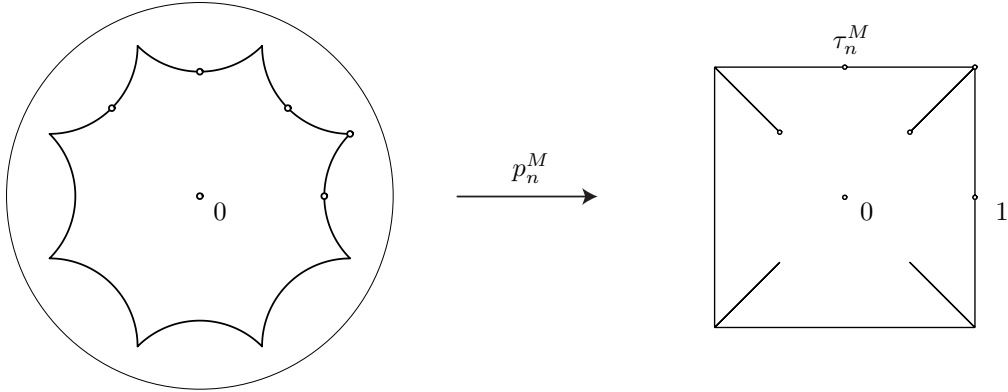


FIGURE 1.19. Octogone $\mathcal{O}_4 \subset \mathbb{D}$ et son image $p_n^M(\mathcal{O}_4) \subset \mathbb{C}$.

TABLE 1.20. Approximations basées sur l'octogone \mathcal{O}_4 et le groupe auxiliaire G'_4 .

τ_n^M	$-7.63576620680502648 \times 10^{-11} + 1.00000000008038948 i$
\tilde{a}_1	$2.000000000035 + 0.000000000334208265439 i$
\tilde{a}_2	$0.999999999944 + 1.000000000009 i$
\tilde{a}_3	$0.999999999701 - 0.999999999604 i$
RN	$1.14329527590 \times 10^{-11}$

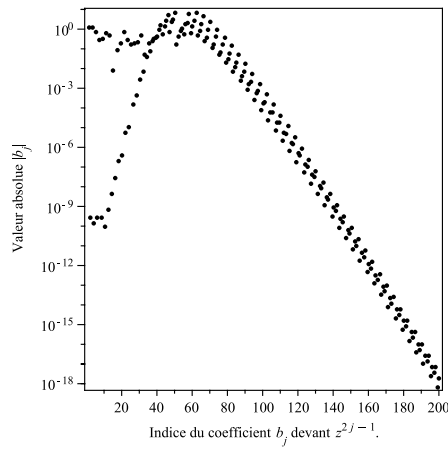


FIGURE 1.21. Graphique de la valeur absolue des coefficients du polynôme d'approximation p_n^M .

Uniformisation numérique de la surface associée à \mathcal{O}_5, G'_5 .

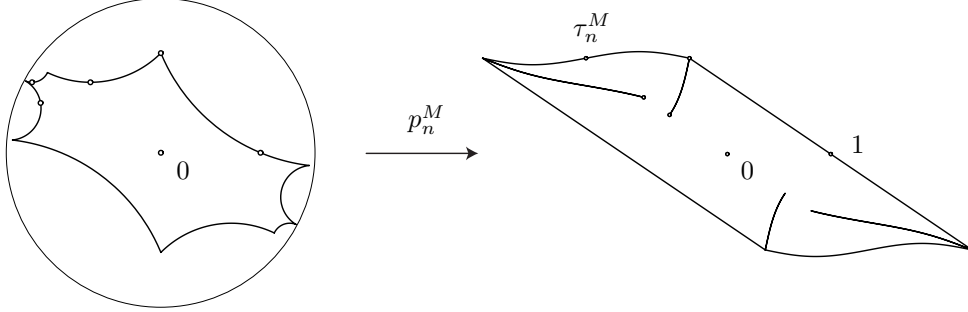


FIGURE 1.22. Octogone $\mathcal{O}_5 \subset \mathbb{D}$ et son image $p_n^M(\mathcal{O}_5) \subset \mathbb{C}$.

TABLE 1.23. Approximations basées sur l'octogone \mathcal{O}_5 et le groupe auxiliaire G'_5 .

τ_n^M	$-1.36680997243896084 + 0.930296570970263303 i$
\tilde{a}_1	$0.00000544550550774 - 1.00000240154 i$
\tilde{a}_2	$0.500001468807 - 0.499999437677 i$
\tilde{a}_3	$1.00000247251 - 0.999994756952 i$
RN	0.000000000429133975568

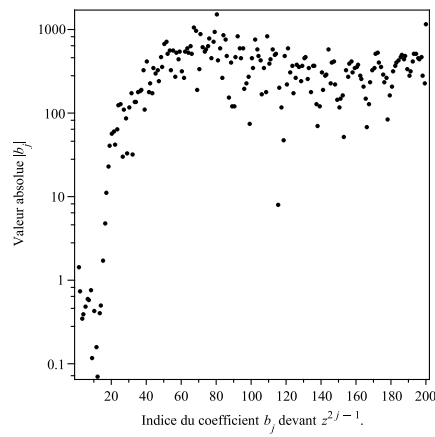


FIGURE 1.24. Graphique de la valeur absolue des coefficients du polynôme d'approximation p_n^M .

Uniformisation numérique de la surface associée à \mathcal{O}_6, G'_6 .

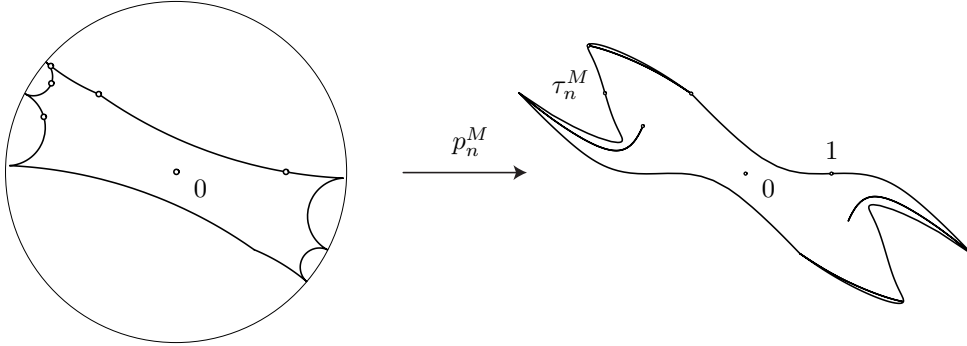


FIGURE 1.25. Octogone $\mathcal{O}_6 \subset \mathbb{D}$ et son image $p_n^M(\mathcal{O}_6) \subset \mathbb{C}$.

TABLE 1.26. Approximations basées sur l'octogone \mathcal{O}_6 et le groupe auxiliaire G'_6 .

τ_n^M	$-1.63672698106216696 + 0.938303270470989824i$
\tilde{a}_1	$1.02393495815 - 1.02346635317i$
\tilde{a}_2	$0.980584182433 + 1.02307943265i$
\tilde{a}_3	$2.01947553054 + 0.0257389167762i$
RN	0.00000215774657765

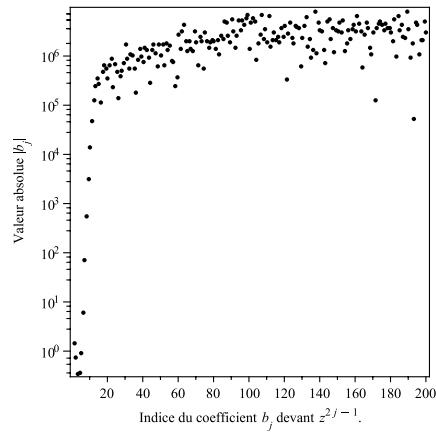


FIGURE 1.27. Graphique de la valeur absolue des coefficients du polynôme d'approximation p_n^M .

Chapitre 2

Rappels et résultats préparatoires

Dans ce deuxième chapitre, nous rappelons des éléments de deux théories classiques dont nous aurons besoin au prochain chapitre, à savoir des éléments de la théorie de l'approximation complexe (Section 2.1) et des éléments de la théorie des formes différentielles sur la surfaces de Riemann (Section 2.2). Ces rappels sont accompagnés de résultats préparatoires spécifiques à nos besoins.

2.1 Éléments de la théorie de l'approximation complexe

Dans le Paragraphe 2.1.1, nous commençons par rappeler deux résultats généraux d'analyse fonctionnelle sur la méthode d'approximation au sens des moindres carrés dans les espaces de Hilbert. Nous présentons ensuite des résultats plus spécifiques à la théorie de l'approximation complexe. Nos références principales pour ce paragraphe sont les ouvrages de D. Gaier [Gai87], P. Davis [Dav75] et V. Trenogin [Tré85]. Sauf exceptions, nous ne donnons pas les démonstrations des résultats énoncés, mais une référence précise est à chaque fois mentionnée.

Dans le Paragraphe 2.1.2, nous développons une conséquence importante du Lemme de Schwarz.

2.1.1 Théorie classique

Soit X un espace de Hilbert complexe. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire et $\|\cdot\|$ sa norme induite. Rappelons que la norme sur X est une fonctionnelle non linéaire *continue* sur $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Soit $E \subset X$ un sous-ensemble. E est appelé un *système orthonormal* dans X si pour tout $u, v \in E$, nous avons $\langle u, v \rangle = 1$ si $u = v$ et $\langle u, v \rangle = 0$ si $u \neq v$. E est dit *fermé* si l'ensemble des \mathbb{C} -combinaisons linéaires d'éléments de E est dense dans X . Si $\{x_i^*\}_{i \geq 1}$ est un système orthonormal dans X et $y \in X$, les coefficients $\langle y, x_i^* \rangle$, $i \geq 1$, sont appelés *coefficients de Fourier* (ou *de Galerkin*) de y relativement à $\{x_i^*\}$.

Théorème 2.1 Soient X un espace de Hilbert complexe et $\{x_i^*\}_{i \geq 1}$ un système orthonormal dans X . Alors :

- i) *Propriété de minimalité des coefficients de Fourier* : pour $y \in X$ et $n \geq 1$, la quantité $\|y - \sum_{i=1}^n b_i x_i^*\|^2$ est minimale si et seulement si $b_i = \langle y, x_i^* \rangle$, et ce minimum vaut $\|y\|^2 - \sum_{i=1}^n |b_i|^2$.
- ii) *Le système orthonormal $\{x_i^*\}$ est complet si et seulement si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| y - \sum_{i=1}^n \langle y, x_i^* \rangle x_i^* \right\| = 0$$

pour tout $y \in X$.

Preuve. Voir par exemple [Gai87, pp. 24-25]. \square

Théorème 2.2 Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace vectoriel normé sur \mathbb{C} . Soient $y \in X$ et n éléments linéairement indépendants $x_1, \dots, x_n \in X$. Alors il existe des scalaires $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$\|y - (a_1 x_1 + \dots + a_n x_n)\|_X = \min_{\alpha_i \in \mathbb{C}} \|y - (\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n)\|_X.$$

De plus, si la norme $\|\cdot\|_X$ est strictement convexe, alors les scalaires $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ sont uniquement déterminés.

Preuve. Voir par exemple [Dav75, p. 137, Théorème 7.4.1] pour l'existence et [Dav75, p. 142, Théorème 7.5.3] pour l'unicité. \square

Remarque 2.3 La norme induite par un produit scalaire est strictement convexe. En effet, soient $x, y \in X$ deux éléments distincts avec $\|x\| = \|y\| = 1$. Puisque la norme est induite par un produit scalaire, l'identité du parallélogramme est vérifiée. Nous avons donc

$$\|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4 - \|x - y\|^2.$$

Puisque $x \neq y$, nous avons $\|x - y\| > 0$. Par conséquent, $\|x + y\| < 2$ et la norme est ainsi strictement convexe.

Nous passons à la partie plus spécifique à la théorie de l'approximation complexe.

Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine de Jordan. Nous définissons les espaces suivants

$$L^2(D) = \{f : D \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ holomorphe et } I_D[f] < \infty\},$$

$$L_0^2(D) = \{f \in L^2(D) \mid f(0) = 0\},$$

$$L_{\text{imp}}^2(D) = \{f \in L^2(D) \mid f \text{ impaire}\},$$

$$\mathcal{P}^n = \{p \in \mathbb{C}[z] \mid p \text{ polynôme de degré } \leq n\},$$

$$\mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1} = \{p \in \mathcal{P}^{2n-1} \mid p \text{ impair}\},$$

où $I_D[f] = \iint_D |f(z)|^2 dx dy$, avec $z = x + iy$, est bien définie (voir par exemple [Gai87, pp. 2-3]). Puisque D est borné, l'ensemble des monômes $\{1, z, z^2, \dots\}$ est inclus dans $L^2(D)$ et ainsi, nous avons les inclusions

$$\mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1} \subset \mathcal{P}^{2n-1} \subset L^2(D) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1} \subset L_{\text{imp}}^2(D) \subset L_0^2(D) \subset L^2(D).$$

Le lemme suivant est un résultat fondamental pour la théorie de l'approximation complexe et sera utilisé à de nombreuses reprises.

Lemme 2.4 (Lemme fondamental) *Soit $f \in L^2(D)$, $z_0 \in D$ et $d(z_0, \partial D)$ la distance euclidienne entre z_0 et ∂D , le bord de D . Alors*

$$|f(z_0)| \leq \frac{\sqrt{I_D[f]}}{\sqrt{\pi} d(z_0, \partial D)}.$$

Preuve. Nous reprenons essentiellement la démarche provenant de [Dav75, pp. 210-212]. Montrons tout d'abord que pour une fonction f holomorphe dans une boule fermée \overline{B}_r centrée en un point $z_0 \in \mathbb{C}$ de rayon $r \geq 0$ et admettant un développement en série de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in \overline{B}_r,$$

nous avons l'égalité

$$\iint_{\overline{B}_r} |f(z)|^2 dx dy = \pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \frac{r^{2n+2}}{n+1}. \quad (2.5)$$

En effet, puisque le développement en série de Taylor de f converge absolument dans \overline{B}_r , nous avons

$$\begin{aligned} \iint_{\overline{B}_r} |f(z)|^2 dx dy &= \iint_{\overline{B}_r} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - z_0)^m \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n (\bar{z} - \bar{z}_0)^n \right) \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} a_m \bar{a}_n \iint_{\overline{B}_r} (z - z_0)^m (\bar{z} - \bar{z}_0)^n dx dy. \end{aligned}$$

Avec le changement de variable $z = z_0 + \rho e^{i\theta}$, nous obtenons

$$\iint_{\overline{B}_r} (z - z_0)^m (\bar{z} - \bar{z}_0)^n dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho^{m+n+1} e^{(m-n)i\theta} d\rho d\theta.$$

Si $m \neq n$, la double intégrale est nulle. Si $m = n$, nous obtenons $\pi \frac{r^{2n+2}}{n+1}$. D'où l'Égalité (2.5). Nous montrons à présent l'inégalité du lemme. Soit r un réel tel que $0 < r < d(z_0, \partial D)$. Nous avons alors

$$\pi |f(z_0)|^2 r^2 = \pi |a_0|^2 r^2 \stackrel{(*)}{\leq} \iint_{\overline{B}_r} |f(z)|^2 dx dy \stackrel{(**)}{\leq} \iint_D |f(z)|^2 dx dy = I_D[f],$$

où l'inégalité $(*)$ vient de l'Égalité (2.5) et l'inégalité $(**)$ vient du fait que $\overline{B}_r \subset D$. Puisque ceci est vrai pour tout $r \in]0, d(z_0, \partial D)[$, le lemme s'ensuit. \square

Remarque 2.6 L'exemple $D = \mathbb{D}$, $f \equiv 1$ et $z = 0$ démontre que l'inégalité du Lemme fondamental est optimale.

Proposition 2.7 L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle_D : L^2(D) \times L^2(D) \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\langle f, g \rangle_D = \iint_D f(z) \overline{g(z)} \, dx dy, \quad f, g \in L^2(D),$$

où $\overline{g(z)}$ désigne le conjugué complexe de $g(z)$, est un produit scalaire sur $L^2(D)$. Muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle_D$, $L^2(D)$ est un espace de Hilbert.

Preuve. Voir par exemple [Gai87, pp. 4-5] ou [Dav75, pp. 207-213] (preuve très détaillée). Mentionnons tout de même que le Lemme fondamental permet de montrer, dans cette preuve, que $(L^2(D), \langle \cdot, \cdot \rangle_D)$ est complet. \square

Remarque 2.8 Pour $f \in L^2(D)$, nous avons donc la norme $\|f\|_D = \sqrt{\langle f, f \rangle_D} = \sqrt{I_D[f]}$.

Corollaire 2.9 $L_0^2(D)$, $L_{imp}^2(D)$ et $\mathcal{P}^n, \mathcal{P}_{imp}^{2n-1}$, $n \geq 1$, sont des espaces de Hilbert pour les restrictions respectives de $\langle \cdot, \cdot \rangle_D$.

Preuve. Découle du fait que ces espaces sont des sous-espaces vectoriels fermés topologiquement dans $(L^2(D), \langle \cdot, \cdot \rangle_D)$. \square

Remarque 2.10 Soient $U, V \subset \mathbb{C}$ des domaines (*i.e.* ouverts connexes) non vides. Des définitions découlent alors les propriétés naturelles suivantes.

- i) Si $U \subset V$, alors $L^2(V) \subset L^2(U)$.
- ii) Si $U \subset V$ et $f \in L^2(V)$, alors $\|f\|_V \geq \|f\|_U$.

À présent, soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow D$ un chemin continûment différentiable par morceaux. Pour $f, g \in L^2(D)$, nous définissons

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_\gamma &= \int_\gamma f(z) \overline{g(z)} |dz| = \int_a^b f(\gamma(t)) \overline{g(\gamma(t))} |\gamma'(t)| \, dt \\ \|f\|_\gamma &= \langle f, f \rangle_\gamma^{1/2} = \left(\int_\gamma |f(z)|^2 |dz| \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Grâce au Lemme fondamental, $\langle \cdot, \cdot \rangle_\gamma$ est un produit scalaire et $\|\cdot\|_\gamma$ une norme bien définis sur $L^2(D)$.

Le théorème d'approximation suivant (voir [Gai87, p. 17]) justifie l'utilisation de polynômes pour approcher une fonction appartenant à $L^2(D)$.

Théorème 2.11 (Farrel, Markushevich - 1934) Si $D \subset \mathbb{C}$ est un domaine non vide, borné, simplement connexe et dont le bord ∂D est aussi le bord d'un domaine non borné, alors les polynômes sont denses dans $L^2(D)$.

Le théorème suivant (voir par exemple [Gai87, p. 26]) illustre le bon comportement des polynômes d'approximation au sens des moindres carrés dans $L^2(D)$.

Théorème 2.12 Soit $\{\phi_i^*\}_{i \geq 1}$ un système orthonormal complet dans $L^2(D)$. Soit $f \in L^2(D)$ et $\sum_{i=1}^{\infty} \langle f, \phi_i^* \rangle_D \phi_i^*$ son développement en série de Fourier. Alors :

- i) La limite de $\|f - \sum_{i=1}^n \langle f, \phi_i^* \rangle_D \phi_i^*\|_D$ lorsque n tend vers ∞ vaut 0.
- ii) La série de Fourier $\sum_{i=1}^{\infty} \langle f, \phi_i^* \rangle_D \phi_i^*$ converge vers f uniformément localement dans D .

Notation. Soit $f \in L^2(D)$. Pour tout entier $r \geq 0$, nous notons $f^{(r)}$ la $r^{\text{ième}}$ dérivée de f , avec la convention $f^{(0)} = f$.

Le point ii) du Théorème 2.12 peut être quelque peu généralisé de la manière suivante.

Lemme 2.13 Soient $D \subset \mathbb{C}$ un domaine non vide borné simplement connexe dont le bord est une courbe fermée simple continûment différentiable par morceaux et $f \in L^2(D)$. Supposons qu'il existe une suite de fonctions $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset L^2(D)$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_D = 0$. Alors, pour tout entier $r \geq 0$, la suite $\{f_n^{(r)}\}_{n \geq 1}$ converge vers $f^{(r)}$ uniformément localement dans D .

Preuve. Soient $K \subset D$ un compact, $\varepsilon > 0$ un réel et $r \geq 0$ un entier. Soit encore $\tilde{K} \subset D$ un compact vérifiant $d(K, \partial \tilde{K}) > 0$, où $d(K, \partial \tilde{K})$ est la distance euclidienne entre K et $\partial \tilde{K}$. En particulier, \tilde{K} contient strictement K . Notons \tilde{C} le bord de \tilde{K} que nous orientons positivement. Puisque $\|f - f_n\|_D$ converge vers 0, il existe un entier $N_{\varepsilon, r}$ tel que

$$\|f - f_n\|_D < \frac{2\pi^{3/2} d(K, \tilde{C})^{r+2}}{r! \ell(\tilde{C})} \varepsilon, \quad \text{pour tout } n \geq N_{\varepsilon, r},$$

où $\ell(\tilde{C})$ est la longueur euclidienne de la courbe \tilde{C} . Pour tout $z \in K$ et tout $n \geq N_{\varepsilon, r}$, nous avons alors

$$\begin{aligned} |f^{(r)}(z) - f_n^{(r)}(z)| &\stackrel{(*)}{=} \frac{r!}{2\pi} \left| \int_{\tilde{C}} \frac{f(w) - f_n(w)}{(w - z)^{r+1}} dw \right| \\ &\leq \frac{r!}{2\pi} \int_{\tilde{C}} \frac{|f(w) - f_n(w)|}{|w - z|^{r+1}} |dw| \\ &\leq \frac{r!}{2\pi} \left(\max_{w \in \tilde{K}} |f(w) - f_n(w)| \right) \frac{\ell(\tilde{C})}{d(K, \tilde{C})^{r+1}} \\ &\stackrel{(**)}{\leq} \frac{r!}{2\pi} \frac{\|f - f_n\|_D}{\pi^{1/2} d(K, \tilde{C})} \frac{\ell(\tilde{C})}{d(K, \tilde{C})^{r+1}} \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

où l'égalité (*) vient de la Formule intégrale de Cauchy et l'inégalité (**) vient du Lemme fondamental. Autrement dit, $\{f_n^{(r)}\}_{n \geq 1}$ converge vers $f^{(r)}$ uniformément sur K et le lemme est démontré. \square

Pour terminer ce paragraphe, nous rappelons quelques notions et résultats sur les suites de fonctions holomorphes.

Le Principe d'identité des fonctions holomorphes, disant que deux fonctions holomorphes égales sur un ensemble admettant un point d'accumulation sont égales sur l'intersection de leurs domaines de définition, sera utilisé sans être mentionné.

Une suite de fonctions holomorphes $\{f_n\}_{n \geq 1}$ dans une partie ouverte non vide D de \mathbb{C} est dite *localement bornée* si tout point $w \in D$ possède un voisinage ouvert $V_w \subset D$ tel que

$$\sup \left\{ |f_n(z)| \mid z \in V_w, n \geq 1 \right\} < \infty.$$

Les deux résultats suivants joueront un rôle essentiel dans le prochain chapitre. Leurs preuves se trouvent par exemple dans [Cha97b, pp. 483-484].

Théorème 2.14 (Théorème de Montel) *Soit $\{f_n\}_{n \geq 1}$ une suite de fonctions holomorphes localement bornée dans une partie ouverte non vide D de \mathbb{C} . Il existe alors une sous-suite qui converge uniformément localement dans D , vers une fonction holomorphe dans D .*

Théorème 2.15 (Critère de convergence de Montel) *Soit $\{f_n\}_{n \geq 1}$ une suite de fonctions holomorphes localement bornée dans une partie ouverte non vide D de \mathbb{C} . Si f est une fonction holomorphe dans D telle que toute sous-suite $\{f_{n_j}\}_{j \geq 0}$ qui converge uniformément sur toute partie compacte de D possède f comme limite, alors $\{f_n\}$ converge vers f uniformément localement dans D .*

2.1.2 Une conséquence du Lemme de Schwarz

Dans ce paragraphe, nous développons un résultat (Lemme 2.23) qui est crucial pour la démonstration du théorème principal (Théorème 3.17) et qui est une conséquence du Lemme de Schwarz. Nous commençons par rappeler ce dernier.

Lemme 2.16 (Lemme de Schwarz) *Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe avec $f(0) = 0$ et $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Alors $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et avec inégalité stricte pour tout $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ sauf si $f(z) = e^{i\theta}z$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. De plus, $|f'(0)| \leq 1$, avec égalité seulement si $f(z) = e^{i\theta}z$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$.*

Pour $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, nous notons $B_r(a) \subset \mathbb{C}$ la boule euclidienne de rayon r centrée en a .

Corollaire 2.17 *Soit $a, b \in \mathbb{C}$, $r_1, r_2 > 0$ et $f : B_{r_1}(a) \rightarrow B_{r_2}(b)$ holomorphe avec $f(a) = b$. Alors,*

$$|f(z) - b| \leq \frac{r_2}{r_1} |z - a|$$

pour tout $z \in B_{r_1}(a)$. En particulier, $f(B_{\alpha r_1}(a)) \subset B_{\alpha r_2}(b)$ quelque soit $\alpha \in]0, 1]$.

Preuve. Soit $\tilde{f} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction holomorphe définie par

$$\tilde{f}(z) = \frac{f(a + r_1 z) - b}{r_2}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Nous avons ainsi $\tilde{f}(0) = 0$ et $\tilde{f}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Le Lemme de Schwarz implique alors

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(z)| \leq |z|, \quad z \in \mathbb{D} &\iff |f(a + r_1 z) - b| \leq r_2 |z|, \quad z \in \mathbb{D} \\ &\iff |f(z) - b| \leq \frac{r_2}{r_1} |z - a|, \quad z \in B_{r_1}(a). \end{aligned}$$

D'où le corollaire. \square

Remarque 2.18 L'inégalité du corollaire est optimale, car il s'agit d'une égalité dans le cas où $a = b$, $r_1 = r_2$ et f est l'identité sur $B_{r_1}(a)$.

Remarque 2.19 Nous mentionnons, au passage, une version harmonique du Lemme de Schwarz due à E. Heinz : Soit $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction harmonique vérifiant $f(0) = 0$ et $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Alors

$$|f(z)| \leq \frac{4}{\pi} \arctan(|z|), \quad z \in \mathbb{D}.$$

De plus, cette inégalité est optimale pour chaque $z \in \mathbb{D}$. Une preuve se trouve dans [Dur04, p. 77] ou dans l'article original de Heinz [Hei59].

Remarque 2.20 Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Le groupe des automorphismes conformes de $B_r(a)$ est alors donné par

$$\text{Conf}(B_r(a)) = \mu_{a,r} \circ \text{Conf}(\mathbb{D}) \circ \mu_{a,r}^{-1}$$

où $\mu_{a,r} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est l'automorphisme conforme défini par $\mu_{a,r} = a + rz$, $z \in \mathbb{C}$.

Lemme 2.21 Soient $M > 0$, $\alpha \in]0, 1]$, $a \in \mathbb{C}$, $b \in B_M(a) \setminus \{a\}$ et $g \in \text{Conf}(B_M(a))$ vérifiant $g(a) = b$. Pour $R > 0$, on a

$$g(B_{\alpha M}(a)) \subset B_R(b) \iff R \geq R_{\min} = \alpha \frac{M^2 - |b - a|^2}{M - \alpha|b - a|}.$$

Preuve. La valeur de R devant être indépendante de a , il suffit de traiter le cas $a = 0$. Soit $g \in \text{Conf}(B_M(0))$ vérifiant $g(a) = b$. Au vu de la Remarque 2.20, nous pouvons prendre g défini par

$$g(z) = M^2 \frac{z + b}{\bar{b}z + M^2}, \quad z \in B_M(0).$$

Nous avons alors

$$R_{\min} = |g(x) - b|$$

où x est un point tel que $|g(x) - b| = \max_{z \in B_{\alpha M}(0)} |g(z) - b|$. Puisque $g(B_{\alpha M}(0))$ est une boule strictement convexe, un tel point x est unique et puisque le centre de cette boule se trouve sur le segment $[b, 0]$, un calcul élémentaire donne

$$x = -\alpha M \frac{b}{|b|}.$$

La situation est illustrée dans la Figure 2.1.

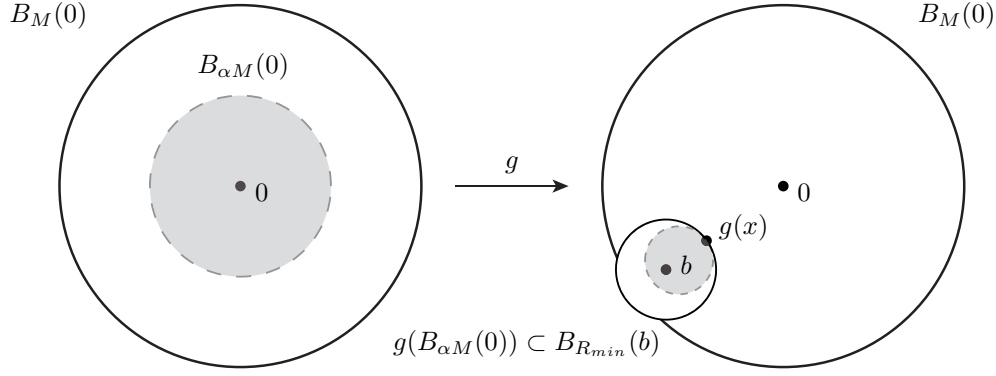


FIGURE 2.1. Illustration pour la preuve du Lemme 2.21 (cas $\alpha = \frac{1}{2}$). Les zones grisées représentent $B_{\alpha M}(0)$ et son image par g .

Nous calculons d'abord

$$g(x) = M^2 \frac{-\alpha M \frac{b}{|b|} + b}{-\alpha M \frac{\bar{b}b}{|b|} + M^2} = M \frac{b}{|b|} \frac{-\alpha M + |b|}{-\alpha |b| + M}.$$

Ainsi

$$R_{min} = |g(x) - b| = \left| M \frac{b}{|b|} \frac{-\alpha M + |b|}{-\alpha |b| + M} - b \right| = \left| M \frac{-\alpha M + |b|}{-\alpha |b| + M} - |b| \right| = \alpha \frac{M^2 - |b|^2}{M - \alpha |b|}.$$

Et le lemme s'ensuit. \square

Corollaire 2.22 Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine borné, $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue qui est holomorphe sur Ω , $a' \in \Omega$, $b = f(a')$ et $\alpha \in]0, 1]$. Nous avons alors les inclusions suivantes :

$$f(B_{\alpha r}(a')) \subset B_{R_{min}}(b) \subset B_R(b)$$

où

$$r = d_{eucl}(a', \partial\Omega), \quad R_{min} = \alpha \frac{M^2 - |b|^2}{M - \alpha |b|}, \quad R = \frac{2\alpha}{1 - \alpha} (M - |b|), \quad M = \max_{z \in \bar{\Omega}} |f(z)|.$$

Preuve. Soit $g \in \text{Conf}(B_M(0))$ tel que $g(0) = b$. Puisque la fonction holomorphe $g^{-1} \circ f|_{\Omega} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vérifie $g^{-1} \circ f(B_r(a')) \subset B_M(0)$, le corollaire du Lemme de Schwarz (Corollaire 2.17) implique que

$$g^{-1} \circ f(B_{\alpha r}(a')) \subset B_{\alpha M}(0).$$

En appliquant g à cette inclusion ainsi que le Lemme 2.21, nous obtenons

$$f(B_{\alpha r}(a')) \subset g(B_{\alpha M}(0)) \subset B_{R_{min}}(b)$$

avec

$$R_{min} = \alpha \frac{M^2 - |b|^2}{M - \alpha |b|}.$$

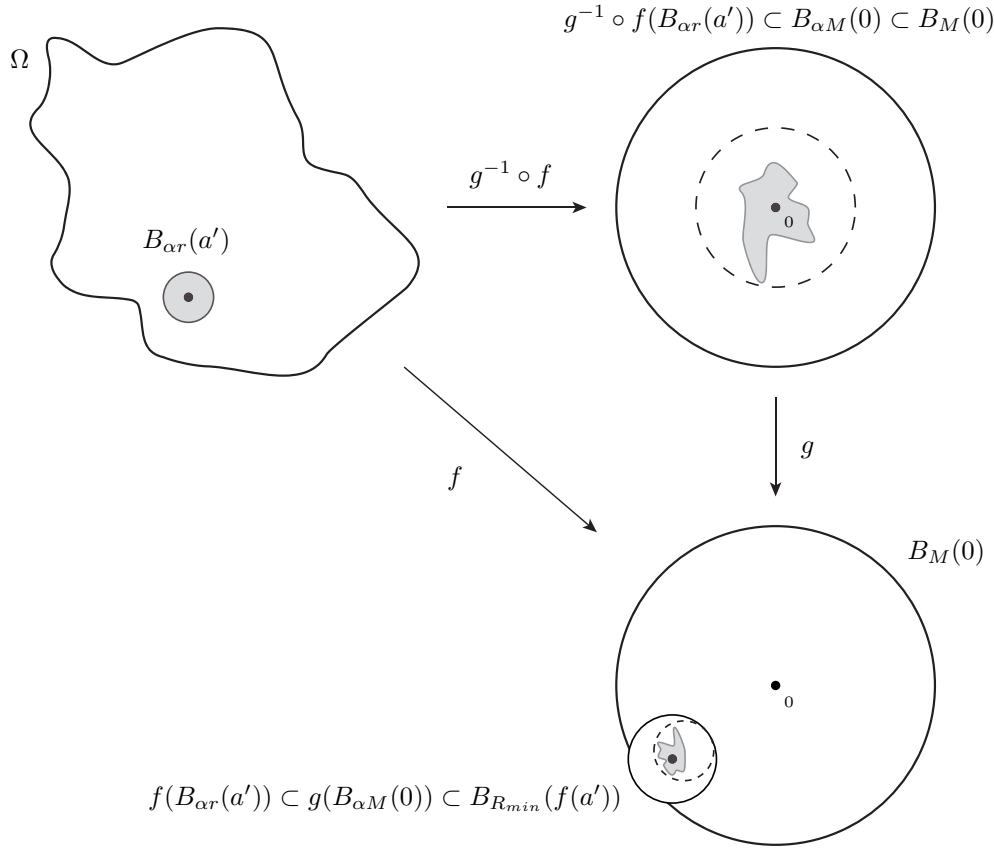


FIGURE 2.2. Illustration pour la preuve du Lemme 2.22 (cas $\alpha = \frac{1}{2}$). Les zones grisées représentent $B_{\alpha r}(a')$ et ses images par $g^{-1} \circ f$ et f respectivement.

La situation est illustrée dans la Figure 2.2.

Il reste à démontrer que $R \geq R_{min}$. Nous avons successivement

$$R_{min} = \alpha \frac{M^2 - |b|^2}{M - \alpha|b|} = \frac{M + |b|}{\alpha^{-1}M - |b|} (M - |b|) < \frac{2M}{\alpha^{-1}M - M} (M - |b|) = \frac{2\alpha}{1 - \alpha} (M - |b|).$$

Le corollaire est ainsi démontré. \square

Lemme 2.23 Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine borné, $h : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue (non constante) qui est holomorphe dans Ω et qui possède un zéro, noté b' , dans Ω , $a \in \partial\Omega$ avec $|h(a)| = \max_{z \in \overline{\Omega}} |h(z)| = M$, $a' \in \Omega$ et $\gamma \subset \Omega$ un chemin rectifiable d'extrémités a' et b' . Si $\varepsilon > 0$ est tel que

$$|h(a) - h(a')| < \varepsilon$$

alors

$$M < 3^l \varepsilon$$

où $l = \left\lceil \frac{\ell_{eucl}(\gamma)}{r/2} \right\rceil + 1$ et $r = d_{eucl}(\gamma, \partial\Omega)$.

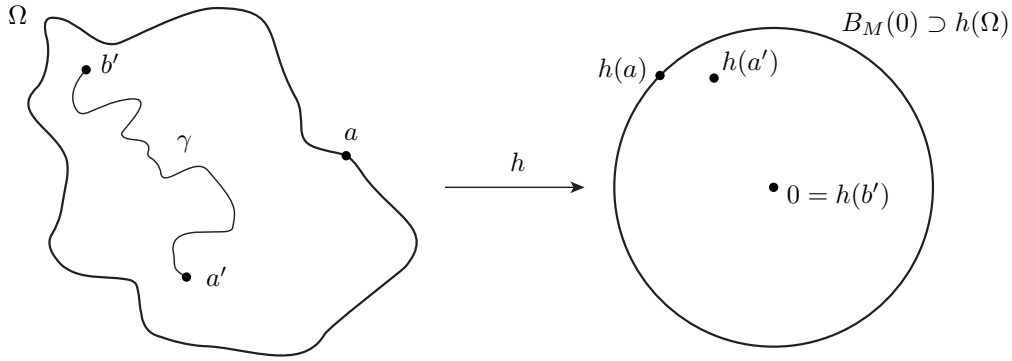


FIGURE 2.3. Situation de l'énoncé du Lemme 2.23. (Noter que $h(\partial\Omega)$ n'est pas dessiné.)

Preuve. Soient $a^0 = a', a^1, a^2, \dots, a^l = b' \in \gamma$ vérifiant $|a^i - a^{i-1}| < r/2$, $i = 1, \dots, l$. La démonstration consiste alors à appliquer à plusieurs reprises le Corollaire 2.22 avec $r = d_{\text{eucl}}(\gamma, \partial\Omega)$ et $\alpha = \frac{1}{2}$. Notons que dans ce cas, $\frac{2\alpha}{1-\alpha} = 2$. Puisque

$$M - |h(a')| \leq |h(a) - h(a')| < \varepsilon,$$

le Corollaire 2.22 donne

$$\begin{aligned} z \in B_{r/2}(a') &\implies |h(a') - h(z)| < 2 \cdot (M - |h(a')|) < 2 \cdot \varepsilon \\ &\implies |h(a) - h(z)| \leq |h(a) - h(a')| + |h(a') - h(z)| < 3\varepsilon \\ &\xRightarrow{z=a^1} |h(a) - h(a^1)| < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

L'application du Corollaire 2.22 à cette dernière inégalité donne

$$\begin{aligned} z \in B_{r/2}(a^1) &\implies |h(a^1) - h(z)| < 2 \cdot 3\varepsilon \\ &\implies |h(a) - h(z)| \leq |h(a) - h(a^1)| + |h(a^1) - h(z)| < 9\varepsilon \\ &\xRightarrow{z=a^2} |h(a) - h(a^2)| < 3^2\varepsilon. \end{aligned}$$

Et ainsi de suite. Par conséquent, pour chaque $i = 1, \dots, l$, nous obtenons

$$\begin{aligned} z \in B_{r/2}(a^{i-1}) &\implies |h(a^{i-1}) - h(z)| < 2 \cdot 3^{i-1}\varepsilon \\ &\implies |h(a) - h(z)| \leq |h(a) - h(a^{i-1})| + |h(a^{i-1}) - h(z)| < 3^i\varepsilon \\ &\xRightarrow{z=a^i} |h(a) - h(a^i)| < 3^i\varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$|h(a) - h(a^l)| < 3^l\varepsilon.$$

Puisque $a^l = b'$ et que par hypothèse $h(b') = 0$, il vient finalement

$$M = |h(a)| = |h(a) - h(a^l)| < 3^l\varepsilon.$$

D'où le lemme. \square

2.2 Éléments de la théorie des formes différentielles sur les surfaces de Riemann

Dans le Paragraphe 2.2.1, nous rappelons le formalisme des formes différentielles sur les surfaces de Riemann, ainsi que des résultats dont nous aurons besoin au paragraphe et au chapitre suivants. Nos sources principales sont les ouvrages de référence de H. Farkas et I. Kra [FK92], et de J. Jost [Jos06]. Lorsqu'ils ne sont pas donnés, les détails des notions et les preuves des résultats développés dans ce paragraphe se trouvent dans [FK92, I.3-4, II.4, III.1-2] et [Jos06, 2.3, 5.1-2].

Dans le Paragraphe 2.2.2, nous construisons, à partir de la fonction de Buser-Silhol $f_{\text{BS}} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$, une forme différentielle harmonique sur $M = \mathbb{D}/G'$ et nous en donnons les propriétés principales.

2.2.1 Théorie classique

Soit M une surface de Riemann et

$$z = x + iy$$

un système local de coordonnées conformes. En coordonnées complexes, nous avons

$$\begin{aligned} dz &= dx + idy \\ d\bar{z} &= dx - idy \end{aligned}$$

Nous définissons les opérateurs

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Nous notons encore $f_x = \frac{\partial}{\partial x}$, etc, p. ex. $df = f_x dx + f_y dy$ pour une fonction $f \in \mathcal{C}^1(M, \mathbb{C})$. Avec ces notations, une fonction $f \in \mathcal{C}^1(M, \mathbb{C})$ est holomorphe si et seulement si $f_{\bar{z}} = 0$ (réécriture des Équations de Cauchy-Riemann). Pour $f \in \mathcal{C}^1(M, \mathbb{C})$ et un changement de

coordonnées $z \mapsto w(z)$, un calcul donne

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}, \\ \overline{\frac{\partial f}{\partial z}} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}, \\ \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}.\end{aligned}$$

De plus,

$$\left| \frac{\partial w}{\partial z} \right| = \left| \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right| = \left| \frac{dw}{dz} \right| = \frac{|dw|}{|dz|}.$$

Nous rappelons la notation complexe ainsi que les égalités ci-dessus, car ils permettent de simplifier grandement les divers calculs à faire.

Une métrique riemannienne g sur M est dite *conforme* si elle est localement donnée par

$$g = \mu^2(z) dz d\bar{z} = \mu^2(z) (dx^2 + dy^2)$$

où $\mu > 0$ est une fonction à valeurs réelles de classe \mathcal{C}^∞ définie dans le domaine du système de coordonnées locales. Pour un changement de coordonnées $w \mapsto z(w)$ et $g = \eta^2(w) dw d\bar{w}$, une telle métrique vérifie alors la formule

$$\eta^2(w) = \mu^2(z) \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{w}} dw d\bar{w}. \quad (2.24)$$

En effet, nous avons

$$\begin{aligned}dz &= z_w dw + z_{\bar{w}} d\bar{w} \\ d\bar{z} &= \bar{z}_w dw + \bar{z}_{\bar{w}} d\bar{w}.\end{aligned}$$

Or, z étant une fonction holomorphe en la variable w , il vient $z_{\bar{w}} = 0$ et $\bar{z}_w = 0$. D'où la formule (2.24).

Proposition 2.25 *Toute surface de Riemann peut être munie d'une métrique riemannienne conforme.*

L'idée de la preuve est la suivante. Puisque toute surface de Riemann est paracompacte, tout recouvrement ouvert possède une partition de l'unité $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ qui lui est subordonnée. Une métrique riemannienne conforme peut alors être définie localement par

$$\varphi_i^2(z) dz d\bar{z}.$$

Dès à présent, nous supposons que M est munie d'une métrique riemannienne conforme g donnée localement par $\mu^2(z) dz d\bar{z}$. La *forme volume* associée, notée dM_g , est définie localement par

$$dM_g = \mu^2 dx \wedge dy.$$

Puisque

$$dz \wedge d\bar{z} = (dx + idy) \wedge (dx - idy) = -2idx \wedge dy,$$

nous avons aussi (en notation complexe)

$$dM_g = \mu^2 dx \wedge dy = \frac{-1}{2i} \mu^2 dz \wedge d\bar{z} = \frac{i}{2} \mu^2 dz \wedge d\bar{z}.$$

L'opérateur étoile de Hodge, noté $\star = \star_g$, est défini comme suit sur les 0-, 1-, 2-formes différentielles *mesurables* (*i.e.* leur(s) coefficient(s) exprimé(s) dans un système de coordonnées locales muni de la mesure de Lebesgue sont des fonctions mesurables). Pour une 0-forme différentielle f , la 2-forme différentielle $\star f$ est définie localement par

$$\star f = f dM_g = f \mu^2 dx \wedge dy = f \frac{i}{2} \mu^2 dz \wedge d\bar{z}.$$

Pour une 1-forme différentielle ω donnée localement par

$$\omega = f dx + g dy = u dz + v d\bar{z},$$

la 1-forme différentielle $\star \omega$ est définie localement par

$$\star \omega = -g dx + f dy = -i u dz + i v d\bar{z}.$$

Notons que les fonctions f, g, u, v sont reliées par les identités

$$\left. \begin{array}{l} f = u + v \\ g = i(u - v) \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{2}(f - ig) \\ v = \frac{1}{2}(f + ig) \end{array} \right.$$

Ajoutons encore que si $h = u + iv$ est une fonction holomorphe et que $\omega = du$, alors $\star \omega = dv$.

Pour une 2-forme différentielle Ω donnée localement par

$$\Omega = f dx \wedge dy = u dz \wedge d\bar{z},$$

la 0-forme différentielle $\star \Omega$ est définie localement par

$$\star \Omega = \frac{f}{\mu^2} = \frac{2}{i} \frac{u}{\mu^2}.$$

Notons de plus que $\star \Omega dM_g = \Omega$.

Remarque 2.26 Nous rappelons les propriétés suivantes, où α est une k -forme différentielle et β une l -forme différentielle :

- 1) $d \circ d = 0$.
- 2) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha$.
- 3) $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$.
- 4) $\star \star \alpha = (-1)^k \alpha$.
- 5) Les opérateurs d, \wedge, \star sont des opérateurs réels, *i.e.* ils commutent avec la conjugaison complexe. (Dans le présent travail, l'opérateur d n'est défini que pour des formes différentielles de classe \mathcal{C}^1 . Lorsque l'on écrit $d\alpha$ il est donc toujours sous-entendu que α est de classe \mathcal{C}^1 .)

Pour $k = 0, 1, 2$, l'espace des k -formes différentielles sur M de carré intégrable est défini par

$$\mathcal{A}_k^2(M) = \mathcal{A}_k^2(M, g) = \left\{ [\alpha] \mid \alpha \text{ } k\text{-forme différentielle sur } M, \text{ mesurable et } \iint_M \alpha \wedge \star \bar{\alpha} < \infty \right\}$$

où $[\alpha]$ est la classe d'équivalence des k -formes différentielles mesurables sur M telle que deux k -formes différentielles représentent le même élément dans $\mathcal{A}_k^2(M)$ si et seulement si elles sont localement identiques sauf éventuellement sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.

Il est intéressant de calculer l'expression de $\alpha \wedge \star \bar{\alpha}$ en coordonnées locales complexes. Pour une 0-forme différentielle f , nous avons

$$f \wedge \star \bar{f} = f \bar{f} \frac{i}{2} \mu^2 dz \wedge d\bar{z} = |f|^2 dM_g.$$

Pour une 1-forme différentielle ω , nous avons

$$\begin{aligned} \omega \wedge \star \bar{\omega} &= (udz + v d\bar{z}) \wedge \star (\bar{u} d\bar{z} + \bar{v} dz) \\ &= (udz + v d\bar{z}) \wedge (-i\bar{v} dz + i\bar{u} d\bar{z}) \\ &= i(|u|^2 + |v|^2) dz \wedge d\bar{z} \\ &= 2 \frac{|u|^2 + |v|^2}{\mu^2} dM_g. \end{aligned}$$

Pour une 2-forme différentielle Ω , nous avons

$$\begin{aligned} \Omega \wedge \star \bar{\Omega} &= (udz \wedge d\bar{z}) \wedge \star (\bar{u} d\bar{z} \wedge dz) \\ &= (udz \wedge d\bar{z}) \wedge \star (-\bar{u} dz \wedge d\bar{z}) \\ &= (udz \wedge d\bar{z}) \frac{2}{i} \frac{-\bar{u}}{\mu^2} \\ &= \frac{-|u|^2}{\mu^2} \frac{2}{i} dz \wedge d\bar{z} \\ &= 4 \frac{|u|^2}{\mu^4} dM_g. \end{aligned}$$

Ces quelques calculs montrent que pour $k = 0, 1, 2$, l'application $(\cdot, \cdot)_M : \mathcal{A}_k^2(M) \times \mathcal{A}_k^2(M) \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$(\alpha_1, \alpha_2)_M = \iint_M \alpha_1 \wedge \star \bar{\alpha}_2, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}_k^2(M)$$

est définie positive. De plus, il est aisé de vérifier qu'elle est bilinéaire et que

$$\overline{(\alpha_2, \alpha_1)_M} = (\alpha_1, \alpha_2)_M$$

(cette dernière égalité provenant de l'égalité $\alpha_1 \wedge \star \alpha_2 = \alpha_2 \wedge \star \alpha_1$ obtenue grâce aux calculs ci-dessus). Par conséquent, $(\cdot, \cdot)_M$ définit un produit scalaire complexe sur chaque $\mathcal{A}_k^2(M)$. Nous notons $\|\cdot\|_M = (\cdot, \cdot)_M^{1/2}$ la norme induite. Le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_M$ est en fait complet.

Théorème 2.27 *Pour $k = 0, 1, 2$, l'espace vectoriel complexe des formes différentielles de carré intégrable $\mathcal{A}_k^2(M)$ muni du produit scalaire complexe $(\cdot, \cdot)_M$ est un espace de Hilbert.*

Pour une preuve détaillée de ce théorème, voir par exemple l'ouvrage de G. Springer [Spr57, Chap. 7].

Puisque $\star\star = (-1)^k$ et $\alpha_1 \wedge \star\alpha_2 = \alpha_2 \wedge \star\alpha_1$, il est aisé de vérifier que

$$(\alpha_1, \alpha_2)_M = (\star\alpha_1, \star\alpha_2)_M$$

pour tout $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}_k^2(M)$. L'opérateur $\star : \mathcal{A}_k^2(M) \longrightarrow \mathcal{A}_{2-k}^2(M)$ est ainsi une isométrie.

Remarque 2.28 Nous rappelons encore que l'opérateur étoile de Hodge est un invariant conforme sur $\mathcal{A}_1^2(M)$, *i.e.* $\star_g = \star_{\tilde{g}}$ pour toute métrique riemannienne \tilde{g} sur M conformément équivalente à g . En particulier, l'opérateur étoile de Hodge commute avec le pullback, par fonction holomorphe, sur les formes différentielles de $\mathcal{A}_1^2(M)$.

La *valeur absolue* de α en $p \in M$ est la fonction $|\cdot|_p : \mathcal{A}_k^2(M) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$|\alpha|_p = |\alpha|_{g,p} = +\sqrt{\star(\alpha \wedge \star\bar{\alpha})}.$$

Un petit calcul montre que la valeur $|\alpha|_p$ ne dépend pas du système de coordonnées locales choisi. Avec cette fonction, nous avons ainsi

$$|\star\alpha|_p = |\alpha|_p, \quad \alpha \wedge \star\bar{\alpha} = |\alpha|_p^2 dM_g \quad \text{et} \quad \|\alpha\|_M^2 = \iint_M \alpha \wedge \star\bar{\alpha} = \iint_M |\alpha|_p^2 dM_g.$$

La Remarque 2.28 implique que la valeur absolue $|\cdot|_p = |\cdot|_{g,p}$ et, par suite, la norme $\|\cdot\|_M = \|\cdot\|_{g,M}$ sur $\mathcal{A}_1^2(M)$ ne dépendent pas directement de g , mais seulement de la classe des métriques riemanniennes sur M conformément équivalentes à g . Enfin, puisque pour $\alpha \in \mathcal{A}_0^2(M)$ $|\alpha|_p$ est égale à la valeur absolue de α au point $p \in M$, nous omettrons parfois l'indice p .

La métrique riemannienne g étant conforme, un calcul donne

$$\|\text{grad} f\|_g^2 = 2 \frac{|f_z|^2 + |f_{\bar{z}}|^2}{\mu^2} = |df|^2$$

pour tout $f \in \mathcal{A}_0^2(M) \cap \mathcal{C}^1$. Ainsi,

$$\|\text{grad} f\|_g^2 dM_g = |df|^2 dM_g = df \wedge \star \overline{df}.$$

En particulier, la quantité

$$\iint_M \|\text{grad} f\|_g^2 dM_g = \|df\|_M^2$$

dépend uniquement de f et de la classe des métriques riemanniennes sur M conformément équivalentes à g , *i.e.* c'est un invariant conforme.

Nous rappelons encore quelques définitions et résultats centraux dans la théorie des formes différentielles sur les surfaces de Riemann.

Théorème 2.29 (Stokes) Soit $U \subset M$ un domaine dont l'adhérence est compacte et dont le bord (si non vide) est une réunion de courbes fermées simples continûment différentiables par morceaux. Si ω est une 1-forme différentielle de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de l'adhérence de U , alors

$$\int_{\partial U} \omega = \iint_U d\omega.$$

Dans le cas où M est compacte, le Théorème de Stokes nous donne l'identité suivante. Soient $k \in \{0, 1\}$, $\alpha \in \mathcal{A}_k^2(M) \cap \mathcal{C}^1$ et $\beta \in \mathcal{A}_{k+1}^2(M) \cap \mathcal{C}^1$. Alors nous avons

$$(\alpha, \star d\star\beta)_M = -(d\alpha, \beta)_M. \quad (2.30)$$

En effet, nous avons successivement

$$\begin{aligned} (d\alpha, \beta)_M &= \iint_M d\alpha \wedge \star\bar{\beta} \\ &= \iint_M d(\alpha \wedge \star\bar{\beta}) - (-1)^k \iint_M \alpha \wedge d\star\bar{\beta} \\ &= \int_{\partial M=\emptyset} \alpha \wedge \star\bar{\beta} - \iint_M \alpha \wedge (-1)^k d\star\bar{\beta} \quad (\text{Théorème de Stokes}) \\ &= - \iint_M \alpha \wedge \star\star d\star\bar{\beta} \\ &= -(\alpha, \star d\star\beta)_M. \end{aligned}$$

Si $f \in \mathcal{C}^2(M, \mathbb{C})$, le Laplacien de f par rapport à g , noté $\Delta_g f$, est défini par

$$\Delta_g f = -\star d\star df.$$

En coordonnées locales, nous avons donc

$$\Delta_g f = -\frac{f_{xx} + f_{yy}}{\mu^2}.$$

où $f_x = \partial f / \partial x$, $f_{xx} = \partial^2 f / \partial x^2$. La propriété importante suivante (Formule de Green) est un cas particulier de l'Identité (2.30) avec $\alpha = f$ et $\beta = df$:

$$(\Delta_g f, f)_M = (df, df)_M, \quad f \in \mathcal{C}^2(M, \mathbb{C}). \quad (2.31)$$

Une fonction $f \in \mathcal{C}^2(M, \mathbb{C})$ vérifiant $\Delta_g f = 0$ est dite *harmonique*. Notons qu'une telle fonction est alors nécessairement de classe \mathcal{C}^∞ . Une 1-forme différentielle est dite *harmonique* (resp. *holomorphe*) si elle est exprimée localement par df avec f une fonction harmonique (resp. holomorphe). Nous avons la caractérisation des formes différentielles harmoniques très utile suivante.

Lemme 2.32 Une 1-forme différentielle ω est harmonique si et seulement si elle est fermée et co-fermée, i.e $d\omega = 0$ et $d\star\omega = 0$.

Dans les définitions ci-dessous la *limite* est à prendre au sens de la norme de $\mathcal{A}_1^2(M)$.

$$\mathcal{C}_0^\infty(M, \mathbb{C}) = \{f : M \longrightarrow \mathbb{C} \text{ de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ avec support compact}\}$$

$$E = \{\omega \in \mathcal{A}_1^2(M) \mid \text{il existe une suite } \{f_n\} \subset \mathcal{C}_0^\infty(M, \mathbb{C}) \text{ avec } \omega = \lim_{n \rightarrow \infty} df_n\}$$

$$E^\perp = \{\omega \in \mathcal{A}_1^2(M) \mid (\omega, df)_M = 0 \text{ pour tout } f \in \mathcal{C}_0^\infty(M, \mathbb{C})\}$$

$$\begin{aligned} E^\star &= \{\omega \in \mathcal{A}_1^2(M) \mid \text{il existe une suite } \{f_n\} \subset \mathcal{C}_0^\infty(M, \mathbb{C}) \text{ avec } \omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \star df_n\} \\ &= \{\omega \in \mathcal{A}_1^2(M) \mid \star \omega \in E\} \end{aligned}$$

$$E^{\star\perp} = \{\omega \in \mathcal{A}_1^2(M) \mid (\omega, \star df)_M = 0 \text{ pour tout } f \in \mathcal{C}_0^\infty(M, \mathbb{C})\}$$

$$H = E^\perp \cap E^{\star\perp}$$

Théorème 2.33 (Décomposition de Hodge) *Nous avons la décomposition orthogonale*

$$\mathcal{A}_1^2(M) = E \oplus E^\star \oplus H.$$

De plus,

$$H = \{\omega \in \mathcal{A}_1^2(M) \mid \omega \text{ est harmonique}\}.$$

En particulier, tout $\omega \in H$ est de classe \mathcal{C}^∞ .

La démonstration de la deuxième partie de ce résultat n'est pas triviale et fait intervenir le Lemme de Weyl. Ce dernier établit qu'une fonction de carré intégrable sur le disque unité \mathbb{D} qui est une solution faible de l'équation de Laplace sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{D})$ est nécessairement harmonique.

Corollaire 2.34

- 1) Pour tout $\omega \in \mathcal{A}_1^2(M)$, il existe une unique décomposition $\omega = \omega_E \oplus \omega_{E^\star} \oplus \omega_H$ avec $\omega_E \in E$, $\omega_{E^\star} \in E^\star$, $\omega_H \in H$.
- 2) L'adhérence, dans $\mathcal{A}_1^2(M)$, de l'ensemble des 1-formes différentielles de carré intégrable fermés, resp. co-fermées, est $E \oplus H$, resp. $E^\star \oplus H$.
- 3) L'ensemble des 1-formes différentielles de carré intégrable de classe \mathcal{C}^∞ est dense dans $\mathcal{A}_1^2(M)$.
- 4) L'ensemble des 1-formes différentielles de carré intégrable de classe \mathcal{C}^∞ à support compact est dense dans $\mathcal{A}_1^2(M)$.

Nous nous intéressons à présent aux surfaces de Riemann compactes. Soit M une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 1$ munie d'une métrique riemannienne conforme. Une *base canonique d'homologie* de M , notée $\{\aleph_1, \dots, \aleph_{2g}\}$, est une base du premier groupe d'homologie de M à coefficients entiers $H_1(M, \mathbb{Z})$ dont la matrice d'intersection est la $2g \times 2g$ -matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$$

où I_g est la $g \times g$ -matrice identité. Nous notons alors $a_i = \aleph_i$, $b_i = \aleph_{i+g}$ pour $i = 1, \dots, g$. (Nous dénoterons parfois par la même lettre une courbe fermée et sa classe d'homologie.) Un exemple de base canonique d'homologie est illustré dans la Figure 2.4.

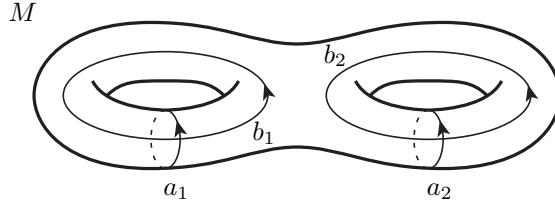


FIGURE 2.4. $\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ est une base canonique d'homologie de M .

Théorème 2.35 *L'espace vectoriel complexe H des formes différentielles harmoniques d'une surface de Riemann compacte M de genre $g \geq 1$ est de dimension (complexe) $2g$.*

Corollaire 2.36 *Étant donné une base canonique d'homologie $\{\aleph_1, \dots, \aleph_{2g}\}$ de $H_1(M, \mathbb{Z})$, il existe une unique base $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{2g}\}$ de H , appelée base duale à la base canonique d'homologie donnée, vérifiant*

$$\int_{\aleph_i} \alpha_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, 2g.$$

De plus, les formes différentielles harmoniques α_j sont réelles.

Corollaire 2.37 *L'espace vectoriel complexe \mathcal{H} des formes différentielles holomorphes sur M est de dimension (complexe) g . De plus, si $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{2g}\}$ est la base duale à une base canonique d'homologie $\{\aleph_1, \dots, \aleph_{2g}\}$ de $H_1(M, \mathbb{Z})$, l'ensemble $\{\omega_1, \dots, \omega_g\}$, avec $\omega_j = \alpha_j + i\star\alpha_j$, est une base de \mathcal{H} .*

Nous donnons encore deux formules classiques qui nous seront utiles par la suite.

Proposition 2.38 (Relations bilinéaires de Riemann) *Si θ et $\tilde{\theta}$ sont deux formes différentielles fermées sur une surface de Riemann compacte M de genre $g \geq 1$, alors*

$$\iint_M \theta \wedge \tilde{\theta} = \sum_{i=1}^g \left\{ \int_{a_i} \theta \int_{b_i} \tilde{\theta} - \int_{b_i} \theta \int_{a_i} \tilde{\theta} \right\} \quad (2.39)$$

où $\{a_i, b_i\}_{i=1}^g$ est une base canonique d'homologie de M . En particulier, si θ est une forme différentielle harmonique sur M , alors

$$\|\theta\|_M^2 = \sum_{i=1}^g \left\{ \int_{a_i} \theta \int_{b_i} \star \bar{\theta} - \int_{b_i} \theta \int_{a_i} \star \bar{\theta} \right\}. \quad (2.40)$$

Nous terminons ce paragraphe par le calcul d'identités (Lemme 2.41) relatives aux périodes et à la norme des éléments de la base duale d'une base canonique d'homologie d'un tore. Soient donc M une surface de Riemann compacte de genre 1 et a, b deux représentants d'une base canonique d'homologie de M . Nous préciserons la donnée des courbes fermées a, b au prochain paragraphe. Soit encore α, β la base duale à $\{[a], [b]\}$. Les formes harmoniques réelles α, β vérifient donc

$$\begin{aligned}\int_a \alpha &= 1, & \int_b \alpha &= 0, \\ \int_a \beta &= 0, & \int_b \beta &= 1.\end{aligned}$$

Dans cette base, les formes conjuguées $\star\alpha, \star\beta$ sont ainsi données par :

$$\begin{aligned}\star\alpha &= \alpha \int_a \star\alpha + \beta \int_b \star\alpha \\ \star\beta &= \alpha \int_a \star\beta + \beta \int_b \star\beta\end{aligned}$$

Lemme 2.41 *Nous avons les identités suivantes :*

$$\|\alpha\|_M^2 = \int_b \star\alpha, \quad (2.42)$$

$$\|\beta\|_M^2 = - \int_a \star\beta, \quad (2.43)$$

$$\int_b \star\beta = - \int_a \star\alpha, \quad (2.44)$$

$$\int_a \star\alpha \int_b \star\beta = 1 - \|\alpha\|_M^2 \|\beta\|_M^2, \quad (2.45)$$

$$\left(\int_a \star\alpha \right)^2 = -1 + \|\alpha\|_M^2 \|\beta\|_M^2, \quad (2.46)$$

$$\left(\int_b \star\beta \right)^2 = -1 + \|\alpha\|_M^2 \|\beta\|_M^2. \quad (2.47)$$

Preuve. Pour les Identités (2.42) et (2.43), nous avons respectivement

$$\begin{aligned}\|\alpha\|_M^2 &\stackrel{(2.40)}{=} \underbrace{\int_a \alpha}_{=1} \int_b \star\alpha - \underbrace{\int_b \alpha}_{=0} \int_a \star\alpha = \int_b \star\alpha, \\ \|\beta\|_M^2 &\stackrel{(2.40)}{=} \underbrace{\int_a \beta}_{=0} \int_b \star\beta - \underbrace{\int_b \beta}_{=1} \int_a \star\beta = - \int_a \star\beta.\end{aligned}$$

Pour l'Identité (2.44), nous calculons :

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta) &= \iint_M \alpha \wedge \star\beta \stackrel{(2.39)}{=} \underbrace{\int_a \alpha}_{=1} \int_b \star\beta - \underbrace{\int_b \alpha}_{=0} \int_a \star\beta = \int_b \star\beta, \\ (\beta, \alpha) &= \iint_M \beta \wedge \star\alpha \stackrel{(2.39)}{=} \underbrace{\int_a \beta}_{=0} \int_b \star\alpha - \underbrace{\int_b \beta}_{=1} \int_a \star\alpha = - \int_a \star\alpha,\end{aligned}$$

et nous notons que $(\alpha, \beta) = \overline{(\beta, \alpha)} = (\beta, \alpha)$ puisque les formes différentielles α, β sont réelles. De manière similaire, nous avons pour l'Identité (2.45) :

$$\begin{aligned} (\star\alpha, \beta) &= \iint_M \star\alpha \wedge \star\bar{\beta} \stackrel{(2.39)}{=} \int_a \star\alpha \int_b \star\beta - \int_b \star\alpha \int_a \star\beta \stackrel{(2.42)}{=} \int_a \star\alpha \int_b \star\beta + \|\alpha\|_M^2 \|\beta\|_M^2 \\ (\beta, \star\alpha) &= \iint_M \beta \wedge \star\bar{\star\alpha} = \iint_M \beta \wedge (-\alpha) \stackrel{(2.39)}{=} - \underbrace{\int_a \beta}_{=0} \underbrace{\int_b \alpha}_{=0} + \underbrace{\int_b \beta}_{=1} \underbrace{\int_a \alpha}_{=1} = 1 \end{aligned}$$

ainsi que $(\star\alpha, \beta) = \overline{(\beta, \star\alpha)} = (\beta, \star\alpha)$. Les Identités (2.46) et (2.47) découlent toutes deux des Identités (2.44) et (2.45), et le lemme s'ensuit. \square

2.2.2 Définition et propriétés de la forme différentielle harmonique ω_{BS}

Avant d'introduire la forme différentielle harmonique ω_{BS} , nous faisons une remarque importante.

Remarque 2.48 Dans la preuve de l'existence (et de l'unicité) de $\tau_{\text{BS}} \in \mathbb{H}$ et de $f_{\text{BS}} \in L_{\text{imp}}^2(\tilde{D})$ (Théorème 1.17), donnée par P. Buser et R. Silhol, apparaissent un tore conforme $\mathbb{C}/\Lambda_{\tau_{\text{BS}}}$, où $\Lambda_{\tau_{\text{BS}}} \subset \mathbb{C}$ est le réseau euclidien engendré par $2, 2\tau_{\text{BS}}$, et l'application biholomorphe $\iota : M = \mathbb{D}/G' \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda_{\tau_{\text{BS}}}$ telle que $\iota(\pi(0)) = \pi_{\tau_{\text{BS}}}(0)$, où $\pi_{\tau_{\text{BS}}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda_{\tau_{\text{BS}}}$ la projection canonique. Ces deux applications permettent alors de ramener la métrique euclidienne sur M . Dès à présent, nous supposons donc que M est muni de la métrique euclidienne via ces deux applications. Nous utiliserons, en particulier dans la preuve du Théorème 3.33 au prochain chapitre, que la forme volume dM_g sur M est définie localement par $(\iota \circ \pi_{\tau_{\text{BS}}}^{-1})^*(dx \wedge dy)$ avec $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

À présent, soient $f_{\text{BS}} = u_{\text{BS}} + iv_{\text{BS}} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction holomorphe et $\tau_{\text{BS}} \in \mathbb{H}$ le nombre complexe issu du Théorème de Buser-Silhol (Théorème 1.17). Les fonctions $u_{\text{BS}}, v_{\text{BS}}$ sont donc harmoniques réelles. Nous considérons les différentielles harmoniques réelles définies sur \mathbb{D} :

$$\omega_{\text{BS}} = \text{Re}(df_{\text{BS}}) = du_{\text{BS}},$$

$$\star\omega_{\text{BS}} = \star du_{\text{BS}} = dv_{\text{BS}} = \text{Im}(df_{\text{BS}}).$$

Puisque la fonction f_{BS} satisfait les relations de périodicité, les formes différentielles $df_{\text{BS}}, du_{\text{BS}}, dv_{\text{BS}}$ sont G' -invariantes. Par conséquent, ces trois formes différentielles sont de classe \mathcal{C}^∞ et harmoniques sur le tore $M = \mathbb{D}/G'$. Nous pouvons donc utiliser sans ambiguïté la même notation pour dénoter ces formes différentielles tantôt sur \mathbb{D} tantôt sur M .

Nous donnons au tore M , une fois pour toute, l'orientation qui est induite par l'orientation positive de \mathbb{D} via la projection canonique $\pi : \mathbb{D} \rightarrow M = \mathbb{D}/G'$, et nous considérons la base canonique d'homologie $[a], [b]$ de $H_1(M, \mathbb{Z})$ définie par les courbes orientées $a = \pi(\tilde{a}), b = \pi(\tilde{b}) \subset M$ avec $\tilde{a} = [m_5, m_1]_h, \tilde{b} = [m_7, m_3]_h$ et où les segments hyperboliques $[\cdot, \cdot]_h$ sont orientés par l'ordre d'apparition des extrémités (cf. Figure 2.5).

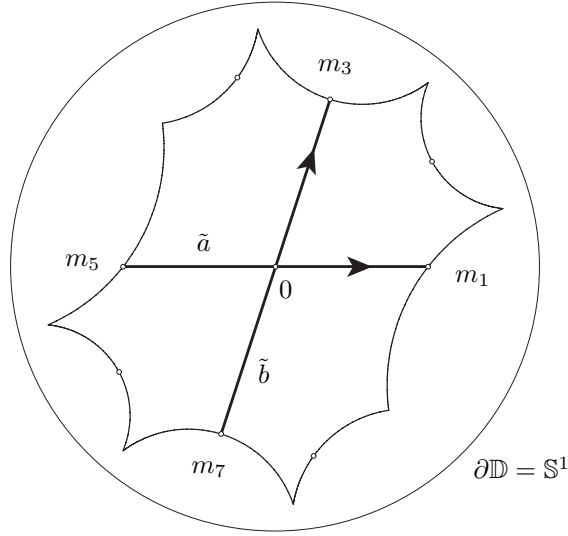


FIGURE 2.5. Relèvements $\tilde{a} = [m_5, m_1]_h$, $\tilde{b} = [m_7, m_3]_h \subset \overline{\mathcal{O}}$ des représentants de la base canonique de $H_1(M, \mathbb{Z})$.

Les périodes de ω_{BS} , $\star\omega_{\text{BS}}$ sont alors données par :

$$\begin{aligned} \int_a \omega_{\text{BS}} &= 2, & \int_a \star\omega_{\text{BS}} &= 0, \\ \int_b \omega_{\text{BS}} &= 2\text{Re}(\tau_{\text{BS}}), & \int_b \star\omega_{\text{BS}} &= 2\text{Im}(\tau_{\text{BS}}). \end{aligned}$$

En effet, à l'aide des relations de périodicité, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_a \omega_{\text{BS}} &= \int_{[m_5, m_1]_h} du_{\text{BS}} = u_{\text{BS}}(m_1) - u_{\text{BS}}(m_5) = \text{Re}(f_{\text{BS}}(g_1(m_5)) - f_{\text{BS}}(m_5)) = 2, \\ \int_a \star\omega_{\text{BS}} &= \int_{[m_5, m_1]_h} dv_{\text{BS}} = v_{\text{BS}}(m_1) - v_{\text{BS}}(m_5) = \text{Im}(f_{\text{BS}}(g_1(m_5)) - f_{\text{BS}}(m_5)) = 0, \\ \int_b \omega_{\text{BS}} &= \int_{[m_7, m_3]_h} du_{\text{BS}} = u_{\text{BS}}(m_3) - u_{\text{BS}}(m_7) = \text{Re}(f_{\text{BS}}(g_3(m_7)) - f_{\text{BS}}(m_7)) = 2\text{Re}(\tau_{\text{BS}}), \\ \int_b \star\omega_{\text{BS}} &= \int_{[m_7, m_3]_h} dv_{\text{BS}} = v_{\text{BS}}(m_3) - v_{\text{BS}}(m_7) = \text{Im}(f_{\text{BS}}(g_3(m_7)) - f_{\text{BS}}(m_7)) = 2\text{Im}(\tau_{\text{BS}}). \end{aligned}$$

Notons que ces quatre intégrales ne dépendent que des classes d'homologie de a, b et non pas du représentant puisque ω_{BS} est en particulier une forme différentielle fermée. Nous avons donc

$$\omega_{\text{BS}} = 2\alpha + 2\text{Re}(\tau_{\text{BS}})\beta,$$

$$\star\omega_{\text{BS}} = 2\text{Im}(\tau_{\text{BS}})\beta.$$

Nous exprimons les liens entre τ_{BS} et la base $\{\alpha, \beta\}$ de H dans le résultat suivant.

Lemme 2.49 *Nous avons les identités suivantes :*

$$\operatorname{Re}(\tau_{\text{BS}}) = \frac{\int_a \star \alpha}{\|\beta\|_M^2}, \quad (2.50)$$

$$\operatorname{Im}(\tau_{\text{BS}}) = \frac{1}{\|\beta\|_M^2}, \quad (2.51)$$

$$|\tau_{\text{BS}}| = \frac{\|\alpha\|_M}{\|\beta\|_M}. \quad (2.52)$$

Preuve. Notons que

$$\star \omega_{\text{BS}} = 2\star \alpha + 2\operatorname{Re}(\tau_{\text{BS}})\star \beta.$$

Nous avons respectivement

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \int_a \star \omega_{\text{BS}} \\ &= \int_a \star \alpha + \operatorname{Re}(\tau_{\text{BS}}) \int_a \star \beta \\ &= \int_a \star \alpha - \operatorname{Re}(\tau_{\text{BS}}) \|\beta\|_M^2 \end{aligned} \quad (\text{grâce à (2.43)})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\tau_{\text{BS}}) &= \frac{1}{2} \int_b \star \omega_{\text{BS}} \\ &= \int_b \star \alpha + \operatorname{Re}(\tau_{\text{BS}}) \int_b \star \beta \\ &= \|\alpha\|_M^2 + \frac{\int_a \star \alpha \int_b \star \beta}{\|\beta\|_M^2} \quad (\text{grâce à (2.42), (2.50)}) \\ &= \|\alpha\|_M^2 + \frac{1 - \|\alpha\|_M^2 \|\beta\|_M^2}{\|\beta\|_M^2} \quad (\text{grâce à (2.45)}) \\ &= \frac{1}{\|\beta\|_M^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\tau_{\text{BS}}|^2 &= \frac{\left(\int_a \star \alpha\right)^2 + 1}{\|\beta\|_M^4} \quad (\text{grâce à (2.50), (2.51)}) \\ &= \frac{\|\alpha\|_M^2 \|\beta\|_M^2}{\|\beta\|_M^4} \quad (\text{grâce à (2.46)}) \\ &= \frac{\|\alpha\|_M^2}{\|\beta\|_M^2}. \end{aligned}$$

D'où le lemme. \square

Chapitre 3

Sur la convergence de la méthode d'approximation de Buser-Silhol

Dans ce deuxième chapitre, nous étudions divers types de convergence de la méthode d'approximation de Buser-Silhol. Nous commençons par développer un modèle théorique dans lequel nous étudierons cette méthode d'approximation (Sections 3.1). Dans la Section 3.2, nous démontrons un des résultats principaux de ce travail de thèse, à savoir la convergence des approximations issues d'un processus de minimisation de norme sur des domaines. Ensuite, nous discutons la convergence d'approximations issue d'un processus de minimisation de norme sur certains arcs de courbe (Section 3.3), d'un processus de minimisation de semi-norme sur ces mêmes arcs de courbe (Section 3.4) et finalement, d'un processus de minimisation de semi-norme sur des domaines (Section 3.5).

3.1 Modèle théorique

Nous développons, dans cette section, le modèle d'analyse fonctionnelle dans lequel nous étudierons la méthode d'approximation de Buser-Silhol pour l'uniformisation conforme des surfaces de Riemann hyperelliptiques de genre 2.

Les diverses définitions et notations introduites dans cette section seront conservées jusqu'à la fin de ce chapitre.

3.1.1 Définitions et notations

Soit $(\mathcal{O}, G, G'; \tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$ une uniformisation à la Buser-Silhol d'une surface hyperelliptique de genre 2. Rappelons que le groupe G est engendré par les isométries g_1, g_2, g_3, g_4 (cf. Figure 1.1 page 15) et le groupe G' par les isométries $g_1, g_3, h_2, h_4, h_6, h_8$ (cf. Figure 1.2 page 16).

Pour un nombre réel $\delta > 0$ et un sous-ensemble $E \subset \mathbb{D}$ donnés, nous notons

$$N_\delta(E) = \{z \in \mathbb{D} \mid d_{\text{hyp}}(z, E) < \delta\}$$

le δ -voisinage (hyperbolique) de E . Soient

$$\tilde{\delta} > 0,$$

$$\tilde{D} = N_{\tilde{\delta}}(\mathcal{O}), \quad (\text{cf. Figure 3.1}),$$

$$\tilde{D}_1^{\min} = N_{\tilde{\delta}}([s_4, m_5]_h) \subset \tilde{D}, \quad (\text{cf. Figure 3.2}),$$

$$\tilde{D}_2^{\min} = N_{\tilde{\delta}}([s_1, m_2]_h) \subset \tilde{D},$$

$$\tilde{D}_3^{\min} = N_{\tilde{\delta}}([s_6, m_7]_h) \subset \tilde{D},$$

$$\tilde{D}_4^{\min} = N_{\tilde{\delta}}([s_3, m_4]_h) \subset \tilde{D}.$$

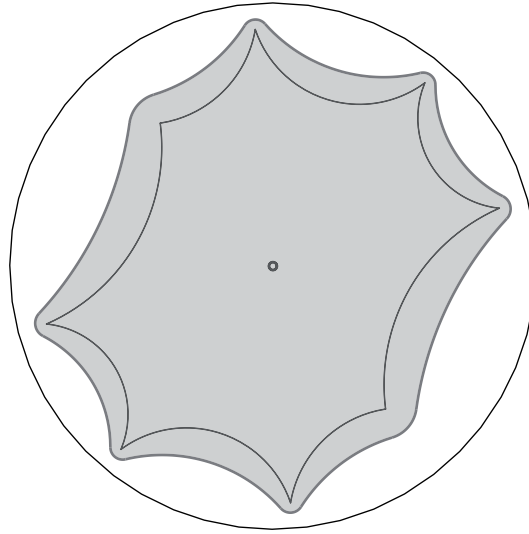


FIGURE 3.1. \tilde{D} est le $\tilde{\delta}$ -voisinage de l'octogone \mathcal{O} ($\tilde{\delta} = 0.5$).

Nous définissons ensuite les espaces suivants

$$X = \mathbb{C} \times L_{\text{imp}}^2(\tilde{D}),$$

$$Y = L^2(\tilde{D}_1^{\min}) \times L^2(\tilde{D}_2^{\min}) \times L^2(\tilde{D}_3^{\min}) \times L^2(\tilde{D}_4^{\min}).$$

Munis respectivement des produits scalaires

$$\langle (\tau, f), (\tilde{\tau}, \tilde{f}) \rangle_X = \tau \bar{\tilde{\tau}} + \langle f, \tilde{f} \rangle_{\tilde{D}}, \quad (\tau, f), (\tilde{\tau}, \tilde{f}) \in X,$$

$$\langle (f_1, f_2, f_3, f_4), (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3, \tilde{f}_4) \rangle_Y = \sum_{k=1}^4 \langle f_k, \tilde{f}_k \rangle_{\tilde{D}_k^{\min}}, \quad (f_1, f_2, f_3, f_4), (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3, \tilde{f}_4) \in Y,$$

les espaces X et Y sont des espaces de Hilbert. Cela découle du fait que $\mathbb{C}, L_{\text{imp}}^2(\tilde{D}), L^2(\tilde{D}_k^{\min})$ sont complets pour leurs produits scalaires respectifs (Proposition 2.7). Nous notons $\|\cdot\|_X = \langle \cdot, \cdot \rangle_X^{1/2}$ et $\|\cdot\|_Y = \langle \cdot, \cdot \rangle_Y^{1/2}$ les normes induites.

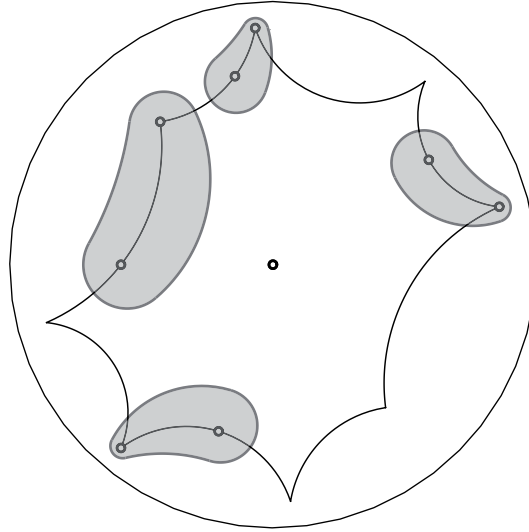


FIGURE 3.2. Les quatre $\tilde{\delta}$ -voisinages $\tilde{D}_1^{\min}, \tilde{D}_2^{\min}, \tilde{D}_3^{\min}, \tilde{D}_4^{\min}$ ($\tilde{\delta} = 0.5$) entrant dans la définition de Y dans le cas $X = \mathbb{C} \times L_{\text{imp}}^2(\tilde{D})$. (Il n'est pas nécessaire que ces quatre domaines soient deux-à-deux disjoints.)

3.1.2 Approximation dans l'espace de Hilbert X

Nous débutons ce paragraphe avec deux lemmes qui regroupent des arguments utilisés à plusieurs reprises par la suite dans différentes preuves.

Lemme 3.1 *Soit $\{(\tau_n, f_n)\}_{n \geq 1} \subset X$ une suite bornée. Alors il existe une sous-suite $\{(\tau_{n_k}, f_{n_k})\}_{k \geq 1}$ de $\{(\tau_n, f_n)\}$ qui converge vers un élément $(\tau, f) \in X$ de sorte que la suite $\{\tau_{n_k}\}_{k \geq 1}$ converge vers $\tau \in \mathbb{C}$ et la suite $\{f_{n_k}\}_{k \geq 1}$ converge vers $f \in L_{\text{imp}}^2(\tilde{D})$ uniformément localement dans \tilde{D} .*

Preuve. Soit $c > 0$ une constante telle que $\|(\tau_n, f_n)\|_X \leq c$ pour tout $n \geq 1$. Nous commençons par montrer que la suite $\{f_n\} \subset L_{\text{imp}}^2(\tilde{D})$ est localement bornée dans \tilde{D} . Soient $w \in \tilde{D}$ et $r = d(w, \partial\tilde{D})/2$, où $d(w, \partial\tilde{D})$ est la distance euclidienne de w à $\partial\tilde{D}$. Pour tout z appartenant à $B(w, r)$, la boule euclidienne de rayon r centrée en w , et pour tout $n \geq 1$, le Lemme fondamental donne

$$|f_n(z)| \leq \frac{\|f_n\|_{\tilde{D}}}{\sqrt{\pi} d(z, \partial\tilde{D})} \leq \frac{\|(\tau_n, f_n)\|_X}{\sqrt{\pi} d(z, \partial\tilde{D})} \leq \frac{c}{\sqrt{\pi} r}.$$

Nous obtenons donc

$$\sup \{|f_n(z)| \mid z \in B(w, r), n \geq 1\} \leq \frac{c}{\sqrt{\pi} r} < \infty.$$

Autrement dit, la suite $\{f_n\}$ est localement bornée dans \tilde{D} . Par le Théorème de Montel (Théorème 2.14), il existe une sous-suite $\{f_{n_k}\}_{k \geq 1}$ de $\{f_n\}$ qui converge uniformément localement dans \tilde{D} , vers une fonction holomorphe $f : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{C}$. De plus, la suite $\{\tau_{n_k}\}_{k \geq 1}$ est bornée car, pour tout $k \geq 1$, nous avons

$$|\tau_{n_k}| \leq \|(\tau_{n_k}, f_{n_k})\|_X \leq c.$$

Il existe donc une sous-suite $\{\tau_{n_{k_l}}\}_{l \geq 1}$ de $\{\tau_{n_k}\}$ qui converge vers un certain $\tau \in \mathbb{C}$. Montrons que (τ, f) appartient à $X = \mathbb{C} \times L^2_{\text{imp}}(\tilde{D})$. Pour cela, il reste à vérifier que la norme $\|f\|_{\tilde{D}}$ est finie. Puisque, pour tout $l \geq 1$, nous avons

$$\|f_{n_{k_l}}\|_{\tilde{D}} \leq \|(\tau_{n_{k_l}}, f_{n_{k_l}})\|_X \leq c,$$

il vient (prendre pour cela une exhaustion de \tilde{D} par des sous-ensembles compacts)

$$\|f\|_{\tilde{D}} \leq c.$$

Ainsi, $(\tau, f) \in X$, $\{(\tau_{n_{k_l}}, f_{n_{k_l}})\}_{l \geq 1}$ est la sous-suite de $\{(\tau_n, f_n)\}$ cherchée et le lemme est démontré. \square

Lemme 3.2 Soient $(\tau, f) \in X$ et $\{(\tau_n, f_n)\}_{n \geq 1} \subset X$ une suite telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\tau_n, f_n) - (\tau, f)\|_X = 0$. Alors, la suite $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$ converge vers τ et, pour tout entier $k \geq 0$, la suite $\{f_n^{(k)}\}_{n \geq 1}$ converge vers $f^{(k)}$ uniformément localement dans \tilde{D} .

Preuve. Découle immédiatement de la définition de la norme $\|\cdot\|_X$ et du Lemme 2.13. \square

Le résultat suivant fournit une suite d'approximations de $(\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$, issues de la méthode des moindres carrés dans $(X, \|\cdot\|_X)$.

Proposition 3.3 Il existe une unique suite $\{(\hat{\tau}_n, \hat{p}_n)\}_{n \geq 1} \subset X$, avec $\hat{p}_n \in \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$ pour chaque $n \geq 1$, telle que

$$\|(\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}}) - (\hat{\tau}_n, \hat{p}_n)\|_X^2 = \min \left\{ \|(\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}}) - (\tau, p)\|_X^2 \mid (\tau, p) \in \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1} \right\}.$$

De plus,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}}) - (\hat{\tau}_n, \hat{p}_n)\|_X = 0,$$

et ainsi $\{\hat{\tau}_n\}_{n \geq 1}$ converge vers τ_{BS} et, pour tout entier $k \geq 0$, $\{\hat{p}_n^{(k)}\}_{n \geq 1}$ converge vers $f_{\text{BS}}^{(k)}$ uniformément localement dans \tilde{D} .

Preuve. Puisque $\tilde{D} = N_{\tilde{\delta}}(\mathcal{O})$ est un domaine de Jordan, $\mathbb{C}[z]$ est dense dans $L^2(\tilde{D})$ (Théorème 2.11) et par suite $\mathbb{C}_{\text{imp}}[z] = \{p \in \mathbb{C}[z] \mid p \text{ impair}\}$ est dense dans $L^2_{\text{imp}}(\tilde{D})$. Ainsi, la famille $\{z^{2n-1}\}_{n \geq 1}$ est fermée dans $L^2_{\text{imp}}(\tilde{D})$ et la famille $\{x_n\}_{n \geq 0}$ définie par

$$x_0 = (1, 0), \quad x_1 = (0, z), \quad x_2 = (0, z^3), \quad \dots, \quad x_n = (0, z^{2n-1}), \quad \dots$$

est fermée dans $X = \mathbb{C} \times L^2_{\text{imp}}(\tilde{D})$. En appliquant le Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, nous obtenons un système orthonormal fermé $\{x_n^*\}_{n \geq 0} \subset X$ tel que, pour tout $n \geq 1$, $x_n^* = (x_{n,1}^*, x_{n,2}^*) \in \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$. Posons à présent

$$b_i = \langle (\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}}), x_i^* \rangle_X = \begin{cases} \tau_{\text{BS}} & \text{si } i = 0 \\ \langle f_{\text{BS}}, x_{i,2}^* \rangle_{\tilde{D}} & \text{si } i \geq 1 \end{cases}$$

$$(\hat{\tau}_n, \hat{p}_n) = \sum_{i=0}^n b_i x_i^*, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Les coefficients b_i sont donc les coefficients de Fourier de $(\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$ relativement au système orthonormal fermé $\{x_n^*\} \subset X$. Pour chaque $n \geq 1$, $(\hat{\tau}_n, \hat{p}_n)$ appartient à $\mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$. Les Théorèmes 2.1 et 2.12 ainsi que le Lemme 3.2 permettent alors de conclure. \square

Notation. Tout au long de ce chapitre, nous écrirons p_n pour un polynôme impair de degré $\deg(p_n) \leq 2n-1$, i.e. $p_n \in \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$, au lieu de la notation habituelle p_{2n-1} et cela afin d'alléger un tant soit peu la notation.

3.1.3 L'opérateur ψ et la fonctionnelle φ_Y

Soient l'opérateur $\psi : X \longrightarrow Y$ et la fonctionnelle $\varphi_Y : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définis respectivement par

$$\psi(\tau, f) = (f \circ g_1 - f, f \circ h_2 - f, f \circ g_3 - f - 2\tau, f \circ h_4 - f),$$

$$\begin{aligned} \varphi_Y(\tau, f) &= \|\psi(\tau, f) - (2, 0, 0, 0)\|_Y^2 \\ &= \|f \circ g_1 - f - 2\|_{\tilde{D}_1^{\min}}^2 + \|f \circ h_2 - f\|_{\tilde{D}_2^{\min}}^2 + \|f \circ g_3 - f - 2\tau\|_{\tilde{D}_3^{\min}}^2 + \|f \circ h_4 - f\|_{\tilde{D}_4^{\min}}^2 \end{aligned}$$

avec $(\tau, f) \in X$. La motivation de la construction de ψ et φ_Y est le fait qu'ils caractérisent l'élément $(\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$. Pour $(\tau, f) \in X$, le résultat de P. Buser et R. Silhol (Théorème 1.17) nous donne en effet l'équivalence

$$\psi(\tau, f) = (2, 0, 0, 0) \iff (\tau, f) = (\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}}), \quad (3.4)$$

et, par suite, l'équivalence

$$\varphi_Y(\tau, f) = \|\psi(\tau, f) - (2, 0, 0, 0)\|_Y^2 = 0 \iff (\tau, f) = (\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}}).$$

Avant de passer à l'étude de l'opérateur ψ , nous rappelons qu'un opérateur linéaire entre deux espaces de Banach est dit *borné* s'il est borné sur la boule unité dans l'espace de départ, ainsi que le résultat d'analyse fonctionnelle suivant (voir par exemple [Tré85, pp. 126-128]).

Remarque 3.5 Pour un opérateur linéaire T entre deux espaces de Banach, les trois propriétés suivantes sont équivalentes

- i) T est continu au point 0,
- ii) T est continu en tout point,
- iii) T est borné.

Pour un opérateur borné $T : A \longrightarrow B$, nous posons

$$\|T\|_{A,B} = \sup \left\{ \|T(a)\|_B \mid a \in A \text{ et } \|a\|_A \leq 1 \right\} < \infty.$$

Lemme 3.6 Soient $U, V \subset \mathbb{D}$ des domaines non vides, $f \in L^2(V)$ et g une transformation de Möbius de \mathbb{D} . Si g est telle que $g(U) \subset V$, alors

$$\|f \circ g\|_U^2 \leq c_g \|f\|_V^2 \quad (3.7)$$

où $c_g = \sup_{w \in g(U)} |(g^{-1})'(w)|^2 < \infty$.

Preuve. Notons $z = x + iy$ et $w = g(z) = u + iv$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \|f \circ g\|_U^2 &= \iint_U |f(g(z))|^2 dx dy \\ &= \iint_{g(U)} |f(w)|^2 |(g^{-1})'(w)|^2 du dv \\ &\leq c_g \iint_{g(U)} |f(w)|^2 du dv \\ &\leq c_g \|f\|_V^2. \end{aligned}$$

Et le lemme est démontré. \square

Corollaire 3.8 *Il existe une constante $c_\psi > 0$ telle que*

$$\|\psi(\tau, f)\|_Y \leq c_\psi \|(\tau, f)\|_X$$

pour tout $(\tau, f) \in X$. La constante c_ψ peut être choisie égale à la racine carrée de

$$\max\{16\pi, 2(c_{g_1} + c_{h_2} + c_{g_3} + c_{h_4} + 5)\}.$$

Preuve. Soit $(\tau, f) \in X$. Nous avons successivement

$$\begin{aligned} \|\psi(\tau, f)\|_Y^2 &= \|f \circ g_1 - f\|_{\tilde{D}_1^{\min}}^2 + \|f \circ h_2 - f\|_{\tilde{D}_2^{\min}}^2 + \|f \circ g_3 - f - 2\tau\|_{\tilde{D}_3^{\min}}^2 + \|f \circ h_4 - f\|_{\tilde{D}_4^{\min}}^2 \\ &\leq 2\|f \circ g_1\|_{\tilde{D}_1^{\min}}^2 + 2\|f\|_{\tilde{D}_1^{\min}}^2 + 2\|f \circ h_2\|_{\tilde{D}_2^{\min}}^2 + 2\|f\|_{\tilde{D}_2^{\min}}^2 \\ &\quad + 2\|f \circ g_3\|_{\tilde{D}_3^{\min}}^2 + 2\|f - 2\tau\|_{\tilde{D}_3^{\min}}^2 + 2\|f \circ h_4\|_{\tilde{D}_4^{\min}}^2 + 2\|f\|_{\tilde{D}_4^{\min}}^2 \\ &\leq 2\|f \circ g_1\|_{\tilde{D}_1^{\min}}^2 + 2\|f \circ h_2\|_{\tilde{D}_2^{\min}}^2 + 2\|f \circ g_3\|_{\tilde{D}_3^{\min}}^2 + 16|\tau|^2 \|1\|_{\tilde{D}_3^{\min}}^2 + 2\|f \circ h_4\|_{\tilde{D}_4^{\min}}^2 \\ &\quad + 10\|f\|_{\tilde{D}}^2 \\ &\leq 16\pi|\tau|^2 + 2(c_{g_1} + c_{h_2} + c_{g_3} + c_{h_4} + 5) \|f\|_{\tilde{D}}^2, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'inégalité dans les espaces normés $\|a + b\|^2 \leq 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$ à plusieurs reprises, l'inégalité $\|f\|_{\tilde{D}_i^{\min}} < \|f\|_{\tilde{D}}$, le Lemme 3.6 et l'inégalité $\|1\|_{\tilde{D}_3^{\min}}^2 = \text{Aire}_{\text{eucl}}(\tilde{D}_3^{\min}) < \pi$. Le corollaire est ainsi démontré. \square

Remarque 3.9 a) Nous avons

$$\begin{aligned} -\tilde{D} &= \tilde{D}, \\ g_1(\tilde{D}_1^{\min}) &= N_{\tilde{\delta}}([m_1, s_1]_h) \subset \tilde{D}, \\ h_2(\tilde{D}_2^{\min}) &= N_{\tilde{\delta}}([m_2, s_2]_h) \subset \tilde{D}, \\ g_3(\tilde{D}_3^{\min}) &= N_{\tilde{\delta}}([m_3, s_3]_h) \subset \tilde{D}, \\ h_4(\tilde{D}_4^{\min}) &= N_{\tilde{\delta}}([m_4, s_4]_h) \subset \tilde{D}. \end{aligned}$$

- b) Comme P. Buser et R. Silhol, nous allons approcher f_{BS} par des fonctions impaires. Ainsi, il n'est pas nécessaire d'inclure explicitement les relations de périodicité $f \circ h_6 = f$ et $f \circ h_8 = f$ dans la définition de l'opérateur ψ , car nous avons respectivement $h_6 = h_0 h_2 h_0$ et $h_8 = h_0 h_4 h_0$, où h_0 est le demi-tour de centre $0 \in \mathbb{D}$, i.e. $h_0(z) = -z$. Par le Lemme 3.6, nous avons aussi :

$$\begin{aligned} \|f \circ g_1 - f - 2\|_{h_5(\tilde{D}_1^{\min})} &\leq c_{h_5} \|f \circ g_1 - f - 2\|_{\tilde{D}_1^{\min}}, \\ \|f \circ h_2 - f\|_{h_2(\tilde{D}_2^{\min})} &\leq c_{h_2} \|f \circ h_2 - f\|_{\tilde{D}_2^{\min}}, \\ \|f \circ g_3 - f - 2\tau\|_{h_7(\tilde{D}_3^{\min})} &\leq c_{h_7} \|f \circ g_3 - f - 2\tau\|_{\tilde{D}_3^{\min}}, \\ \|f \circ h_4 - f\|_{h_4(\tilde{D}_4^{\min})} &\leq c_{h_4} \|f \circ h_4 - f\|_{\tilde{D}_4^{\min}}, \\ \|f \circ h_6 - f\|_{h_0(\tilde{D}_2^{\min})} &= \|f \circ h_2 - f\|_{\tilde{D}_2^{\min}}, \\ \|f \circ h_8 - f\|_{h_0(\tilde{D}_4^{\min})} &= \|f \circ h_4 - f\|_{\tilde{D}_4^{\min}}. \end{aligned}$$

Pour l'inégalité avec g_1 nous avons utilisé les égalités

$$f g_1 h_5 - f h_5 = f h_0 h_5 h_5 + f h_0 h_5 = -f + f g_1$$

qui découlent du fait que f est supposée impaire et que $g_1 = h_0 h_5$. De même pour l'inégalité avec $g_3 = h_0 h_7$. Pour les deux égalités avec h_6, h_8 , il suffit de noter que $|\frac{d}{dz} h_0(z)| = 1$ sur \mathbb{D} .

- c) Si nous n'approchons pas f_{BS} par des fonctions supposées impaires, nous devrions ajouter, à la définition de ψ , les (5^{ème} et 6^{ème}) composantes $f \circ h_6 - f$ et $f \circ h_8 - f$ qui sont définies sur $N_{\tilde{\delta}}([s_5, m_6]_h)$ et $N_{\tilde{\delta}}([s_7, m_8]_h)$ respectivement. De plus, nous devrions étendre les domaines \tilde{D}_1^{\min} et \tilde{D}_3^{\min} à $N_{\tilde{\delta}}([s_4, s_5]_h)$ et $N_{\tilde{\delta}}([s_6, s_7]_h)$ respectivement (cf. Figure 3.3).

Lemme 3.10 *L'opérateur $\psi : X \longrightarrow Y$ est linéaire, continu et injectif.*

Preuve. Commençons par montrer que l'opérateur ψ est bien défini. Soit $(\tau, f) \in X$. Pour chaque $i = 1, \dots, 4$, la $i^{\text{ème}}$ -composante de $\psi(\tau, f)$ définie bien une fonction holomorphe sur \tilde{D}_i^{\min} à valeurs dans \mathbb{C} , comme composition et addition de fonctions holomorphes (τ est vu ici comme la fonction constante $z \longmapsto \tau$, qui appartient bien à $L^2(\tilde{D}_i^{\min})$). Le Corollaire 3.8 implique alors que chaque composante appartient à $L^2(\tilde{D}_i^{\min})$ et nous permet ainsi de conclure que l'opérateur ψ est bien défini.

Linéarité de ψ . Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $(\tau, f), (\tilde{\tau}, \tilde{f}) \in X$. Nous avons alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \psi(\alpha(\tau, f) + (\tilde{\tau}, \tilde{f})) &= \psi(\alpha\tau + \tilde{\tau}, \alpha f + \tilde{f}) \\ &= \left((\alpha f + \tilde{f}) \circ g_1 - (\alpha f + \tilde{f}), \dots, \right. \\ &\quad \left. (\alpha f + \tilde{f}) \circ g_3 - (\alpha f + \tilde{f}) - 2(\alpha\tau + \tilde{\tau}), \dots \right) \\ &= \left(\alpha(f \circ g_1 - f) + (\tilde{f} \circ g_1 - \tilde{f}), \dots, \right. \\ &\quad \left. \alpha(f \circ g_3 - f - 2\tau) + (\tilde{f} \circ g_3 - \tilde{f} - 2\tilde{\tau}), \dots \right) \\ &= \alpha \psi(\tau, f) + \psi(\tilde{\tau}, \tilde{f}). \end{aligned}$$

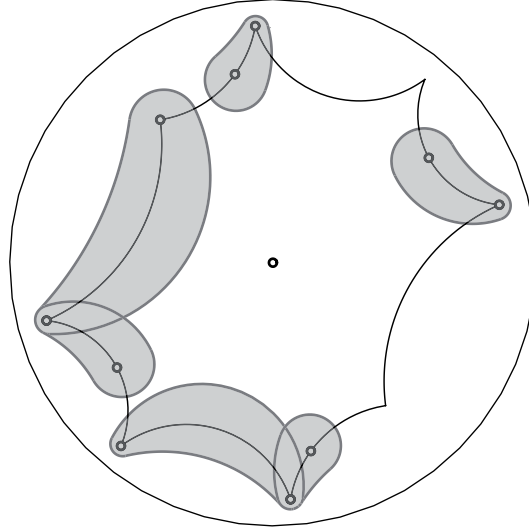


FIGURE 3.3. Les six $\tilde{\delta}$ -voisinages ($\tilde{\delta} = 0.5$) entrant dans la définition de Y dans le cas $X = \mathbb{C} \times L_0^2(\tilde{D})$.

D'où la linéarité.

Continuité de ψ . Puisque ψ est linéaire, il suffit de montrer que ψ est un opérateur borné (Remarque 3.5). Soit $(\tau, f) \in X$ avec $\|(\tau, f)\|_X \leq 1$. Par le Corollaire 3.8, nous avons $\|\psi(\tau, f)\|_Y \leq c_\psi$. Autrement dit, ψ est borné.

Injectivité de ψ . Soit $(\tau, f) \in X$. Pour $(\tau_0, f_0) \in \ker(\psi)$, la linéarité de ψ et l'Équivalence (3.4) donne l'implication

$$\begin{aligned} \psi((\tau_{BS}, f_{BS}) + (\tau_0, f_0)) &= \psi(\tau_{BS}, f_{BS}) + 0 = (2, 0, 0, 0) \\ \implies (\tau_{BS} + \tau_0, f_{BS} + f_0) &= (\tau_{BS}, f_{BS}). \end{aligned}$$

Ainsi, $\tau_0 = 0$ et f_0 est la fonction identiquement nulle. Par conséquent, ψ est injectif et le lemme est démontré. \square

Corollaire 3.11 *L'opérateur $\psi : X \longrightarrow Y$ est borné, i.e. la quantité*

$$\|\psi\|_{X,Y} = \sup \left\{ \|\psi(\tau, f)\|_Y \mid (\tau, f) \in X \text{ et } \|(\tau, f)\|_X \leq 1 \right\}$$

est finie.

Preuve. Découle du Lemme 3.10 et de la Remarque 3.5. \square

Corollaire 3.12 *La fonctionnelle non linéaire $\varphi_Y : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est continue.*

Preuve. Découle du Lemme 3.10 et de la continuité de la norme $\|\cdot\|_Y$ sur Y . \square

Corollaire 3.13 *La suite d'approximations $\{(\hat{\tau}_n, \hat{p}_n)\}_{n \geq 1} \subset X$ de $(\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$ (issue de la Proposition 3.3) vérifie*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_Y(\hat{\tau}_n, \hat{p}_n) = 0.$$

Preuve. Puisque ψ est borné (Lemme 3.10), nous avons pour chaque $n \geq 1$

$$\varphi_Y(\hat{\tau}_n, \hat{p}_n) = \|(2, 0, 0, 0) - \psi(\hat{\tau}_n, \hat{p}_n)\|_Y \leq \|\psi\|_{X,Y} \|(\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}}) - (\hat{\tau}_n, \hat{p}_n)\|_X.$$

Le corollaire découle alors de la Proposition 3.3. \square

Remarque 3.14 Si l'opérateur inverse $\psi|_{\psi(X)}^{-1} : \psi(X) \rightarrow X$ avait été bornée, ce qui n'est pas le cas, nous aurions pu conclure à la convergence de la suite $\{\tau_n^Y\}_{n \geq 1}$ vers τ_{BS} et, pour tout entier $k \geq 0$, à la convergence localement uniforme dans \tilde{D} de la suite $\{p_n^{Y(k)}\}_{n \geq 1}$ vers $f_{\text{BS}}^{(k)}$, et cela comme suit. Pour tout $n \geq 1$, nous aurions eu

$$\begin{aligned} \|(\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}}) - (\tau_n^Y, p_n^Y)\|_X^2 &\leq \|\psi^{-1}\|_{Y,X}^2 \|(2, 0, 0, 0) - \psi(\tau_n^Y, p_n^Y)\|_Y^2 \\ &= \|\psi^{-1}\|_{Y,X}^2 \varphi_Y(\tau_n^Y, p_n^Y) \\ &\leq \|\psi^{-1}\|_{Y,X}^2 \varphi_Y(\hat{\tau}_n, \hat{p}_n). \end{aligned}$$

Or, puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_Y(\hat{\tau}_n, \hat{p}_n) = 0$ (Corollaire 3.13), nous aurions obtenu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}}) - (\tau_n^Y, p_n^Y)\|_X = 0.$$

Le Lemme 3.2 nous aurait alors permis de conclure. Toutefois, cet opérateur inverse n'étant pas borné, nous avons développé une stratégie alternative pour démontrer une convergence de la suite $\{(\tau_n^Y, p_n^Y)\}_{n \geq 1}$, à l'aide d'outils plus géométriques.

3.1.4 La fonctionnelle φ_*

Soit $\|\cdot\|_* : Y \rightarrow \mathbb{R}$ une norme sur Y et notons $\varphi_* : X \rightarrow \mathbb{R}$ la fonctionnelle définie par

$$\varphi_*(\tau, f) = \|(2, 0, 0, 0) - \psi(\tau, f)\|_*^2,$$

avec $(\tau, f) \in X$. Tout comme φ_Y , la fonctionnelle φ_* caractérise l'élément $(\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}}) \in X$ puisque ψ le caractérise et que $\|\cdot\|_*$ est une norme sur Y . Pour $(\tau, f) \in Y$, nous avons alors l'équivalence

$$\varphi_*(\tau, f) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\tau, f) = (\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}}).$$

Proposition 3.15 *Si la norme $\|\cdot\|_* : Y \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement convexe, alors, pour chaque entier $n \geq 1$, il existe un unique élément $(\tau_n^*, p_n^*) \in \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$ vérifiant*

$$\varphi_*(\tau_n^*, p_n^*) = \min\{\varphi_*(\tau, p) \mid (\tau, p) \in \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}\}.$$

De plus, la suite $\{\varphi_*(\tau_n^*, p_n^*)\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+^*$ est convergente. Si la norme $\|\cdot\|_*$ est continue dans $(Y, \|\cdot\|_Y)$, sa limite vaut 0.

Preuve. Soit $n \geq 1$ un entier fixé. Puisque $(1, 0), (0, z), (0, z^3), \dots, (0, z^{2n-1}) \in X$ forment une famille linéairement indépendante, il découle de la linéarité et de l'injectivité de l'opérateur ψ (Lemme 3.10) que les $n + 1$ éléments

$$\psi(1, 0), \psi(0, z), \psi(0, z^3), \dots, \psi(0, z^{2n-1}) \in Y$$

sont linéairement indépendants et engendrent $\psi(\mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1})$. À présent, nous cherchons des coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$\begin{aligned} \varphi_*(a_0, a_1 z + \dots + a_n z^{2n-1}) &= \|(2, 0, 0, 0) - \psi(a_0, a_1 z + \dots + a_n z^{2n-1})\|_*^2 \\ &= \|(2, 0, 0, 0) - (a_0 \psi(1, 0) + a_1 \psi(0, z) + \dots + a_n \psi(0, z^{2n-1}))\|_*^2 \end{aligned}$$

soit minimum. Le résultat classique de la théorie de l'approximation linéaire dans les espaces vectoriels normés rappelé au chapitre précédent (Théorème 2.2) assure l'existence et l'unicité des coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ qui réalise ce minimum. Autrement dit, il existe un unique élément $(\tau_n^*, p_n^*) \in \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$ minimisant φ_* sur $\mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$. De plus, puisque $\mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1} \subset \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n+1}$, la suite de réels positifs $\{\varphi_*(\tau_n^*, p_n^*)\}_{n \geq 1}$ est décroissante, et donc convergente.

Finalement, si la norme $\|\cdot\|_*$ est continue dans $(Y, \|\cdot\|_Y)$, la fonctionnelle φ_* l'est aussi. Ainsi, puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_Y(\hat{\tau}_n, \hat{p}_n) = 0$ (Corollaire 3.13), nous avons aussi $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_*(\tau_n^*, p_n^*) = 0$. Or, par minimalité de (τ_n^*, p_n^*) , nous avons $\varphi_*(\tau_n^*, p_n^*) \leq \varphi_*(\hat{\tau}_n, \hat{p}_n)$ pour tout $n \geq 1$. La proposition est ainsi démontrée. \square

3.2 Approximation par minimisation de norme sur des domaines

Nous commençons cette section par un premier résultat.

Proposition 3.16 *Il existe une unique suite $\{(\tau_n^Y, p_n^Y)\}_{n \geq 1} \subset X$ telle que, pour chaque $n \geq 1$,*

$$(\tau_n^Y, p_n^Y) \in \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1} \quad \text{et} \quad \varphi_Y(\tau_n^Y, p_n^Y) = \min\{\varphi_Y(\tau, p) \mid (\tau, p) \in \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}\}.$$

De plus, la suite $\{(\tau_n^Y, p_n^Y)\}_{n \geq 1}$ vérifie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_Y(\tau_n^Y, p_n^Y) = 0.$$

Preuve. Puisque la norme $\|\cdot\|_Y$ provient d'un produit scalaire, elle est strictement convexe (Remarque 2.3). La proposition découle alors de la Proposition 3.15. \square

À présent, nous souhaiterions démontrer que la suite $\{\tau_n^Y\}_{n \geq 1}$ converge vers τ_{BS} et que, pour tout entier $k \geq 0$, la suite $\{p_n^{Y(k)}\}_{n \geq 1}$ converge vers $f_{\text{BS}}^{(k)}$ uniformément localement dans \tilde{D} .

Ceci est l'objet du théorème principal (Théorème 3.17) énoncé au prochain paragraphe et démontrer dans les paragraphes suivants.

3.2.1 Théorème principal et stratégie de démonstration

Soit $\{(\tau_n, f_n)\}_{n \geq 1} \subset X = \mathbb{C} \times L_{\text{imp}}^2(\tilde{D})$ une suite vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_Y(\tau_n, f_n) = 0.$$

Nous voudrions démontrer que $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$ converge vers τ_{BS} et que, pour tout entier $k \geq 0$, la suite $\{f_n^{(k)}\}_{n \geq 1}$ converge vers $f_{\text{BS}}^{(k)}$ uniformément localement dans \tilde{D} . En posant $t_n = \tau_n - \tau_{\text{BS}}$ et $h_n = f_n - f_{\text{BS}}$, il vient

$$\|\psi(t_n, h_n)\|_Y^2 = \|\psi(\tau_n - \tau_{\text{BS}}, f_n - f_{\text{BS}})\|_Y^2 = \|\psi(\tau_n, f_n) - (2, 0, 0, 0)\|_Y^2 = \varphi_Y(\tau_n, f_n)$$

pour tout $n \geq 1$. Il est ainsi équivalent de démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.17 (Théorème principal) *Si $\{(t_n, h_n)\}_{n \geq 1} \subset X$ est une suite vérifiant*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi(t_n, h_n)\|_Y^2 = 0,$$

alors la suite $\{t_n\}_{n \geq 1}$ converge vers $0 \in \mathbb{C}$ et, pour tout entier $k \geq 0$, la suite $\{h_n^{(k)}\}_{n \geq 1}$ converge vers $0 \in L_{\text{imp}}^2(\tilde{D})$ uniformément localement dans \tilde{D} .

Il vient alors immédiatement :

Corollaire 3.18 *La suite $\{\tau_n^Y\}_{n \geq 1}$ converge vers τ_{BS} et, pour tout entier $k \geq 0$, la suite $\{p_n^{Y(k)}\}_{n \geq 1}$ converge vers $f_{\text{BS}}^{(k)}$ uniformément localement dans \tilde{D} .*

La stratégie générale de la démonstration du Théorème 3.17 est la suivante.

Premièrement, nous démontrons la convergence de la suite $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{C}$ vers zéro (Théorème 3.37). Pour cela, nous allons construire des formes différentielles $\{\omega^n\}_{n \geq 1}$ sur $M = \mathbb{D}/G'$ à partir de du_n , où u_n est la partie réelle d'une approximation $f_n = u_n + iv_n$ de $f_{\text{BS}} = u_{\text{BS}} + iv_{\text{BS}}$ dans le sens $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_Y(\tau_n, f_n) = 0$, et nous allons en calculer les intégrales sur certaines courbes fermées dans M (Paragraphe 3.2.2). Avec les relations obtenues (Théorème 3.33), accompagnées des identités relatives aux périodes de la base duale d'une base canonique d'homologie d'un tore (Lemme 2.41) et à celles de la forme harmonique $\omega_{\text{BS}} = du_{\text{BS}}$ sur M (Lemme 2.49) obtenues via les Relations bilinaires de Riemann, nous allons conclure à la convergence recherchée (Paragraphe 3.2.3).

Secondement, dans le Paragraphe 3.2.4, nous démontrons la convergence uniforme locale dans \tilde{D} vers zéro de la suite $\{h_n\}_{n \geq 1} \subset L_{\text{imp}}^2(\tilde{D})$, et de ses dérivées (Théorème 3.38). Pour cela, nous utiliserons la conséquence du Lemme de Schwarz développée au chapitre précédent (Lemme 2.23) ainsi que le fait que la suite $\{t_n\}_{n \geq 1}$ est en particulier bornée.

3.2.2 Définition et propriétés d'une suite de formes différentielles $\{\omega^n\}_{n \geq 1}$

Nous commençons ce paragraphe par remarquer que la carte $(\pi(\mathcal{O}), \pi|_{\mathcal{O}}^{-1})$, où $\pi : \mathbb{D} \longrightarrow M$ est la projection canonique, est une carte de la structure conforme du tore M . Pour chaque $n \geq 1$, nous notons

$$\tau_n \in \mathbb{C},$$

$$f_n = u_n + iv_n \in L_0^2(\tilde{D}),$$

des approximations de τ_{BS}, f_{BS} vérifiant $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_Y(\tau_n, f_n) = 0$. Les fonctions harmoniques u_n, v_n étant définies au voisinage de $\overline{\mathcal{O}}$, les suites de formes différentielles

$$\begin{aligned} & \left\{ (\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* du_n = (\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* \operatorname{Re}(df_n) \right\}_{n \geq 1}, \\ & \left\{ \star(\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* du_n = (\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* (\star du_n) = (\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* dv_n = (\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* \operatorname{Im}(df_n) \right\}_{n \geq 1}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la commutativité de \star et de $(\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^*$ (Remarque 2.28), sont bien définies sur M et sont de carré intégrable sur M . Autrement dit,

$$\{(\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* du_n\}_{n \geq 1}, \{\star(\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* du_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}_1^2(M).$$

Toutefois, puisque $du_n, \star du_n$ ne sont en général pas G' -équivariantes (car f_n ne vérifie pas exactement les relations de périodicité), $(\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* du_n, \star(\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* du_n$ ne sont pas continues sur M , bien qu'elles soient harmoniques sur $M \setminus \pi(\partial \mathcal{O})$. Pour chaque $n \geq 1$, nous considérons les fonctions holomorphes suivantes qui expriment la déficience des approximations f_n à satisfaire les relations de périodicité :

$$\begin{aligned} e_n^1 &= f_n \circ g_1 - f_n - 2 & \text{sur } N_{\delta}([s_4, s_5]_h) &= \tilde{D}_1^{\min} \cup h_5(\tilde{D}_1^{\min}), \\ e_n^2 &= f_n \circ h_2 - f_n & \text{sur } \tilde{D}_2^{\min}, \\ e_n^3 &= f_n \circ g_3 - f_n - 2\tau_n & \text{sur } N_{\delta}([s_6, s_7]_h) &= \tilde{D}_3^{\min} \cup h_7(\tilde{D}_3^{\min}), \\ e_n^4 &= f_n \circ h_4 - f_n & \text{sur } \tilde{D}_4^{\min}, \\ e_n^6 &= f_n \circ h_6 - f_n & \text{sur } -\tilde{D}_2^{\min}, \\ e_n^8 &= f_n \circ h_8 - f_n & \text{sur } -\tilde{D}_4^{\min}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Nous notons e_n^{re}, e_n^{im} les parties réelle et imaginaire de e_n . Dans le cas où les approximations f_n sont supposées impaires, nous avons les relations

$$e_n^6 = h_0 e_n^2 h_0 \quad \text{et} \quad e_n^8 = h_0 e_n^4 h_0.$$

En effet, puisque $h_6 = h_0 h_2 h_0$, il vient

$$e_n^6 = f_n h_6 - f_n = f_n h_0 h_2 h_0 - h_0 f_n h_0 = h_0 (f_n h_2 h_0 - f_n h_0) = h_0 e_n^2 h_0.$$

L'égalité pour e_n^8 s'obtient de manière similaire.

La remarque suivante suggère alors que les intégrales de $(\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* du_n$, $\star(\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* du_n$ sur les représentants $a = \pi([m_5, m_1]_h)$, $b = \pi([m_7, m_3]_h)$ de la base canonique d'homologie de M définie au paragraphe précédent tendent (lorsque $n \rightarrow \infty$) vers les périodes de ω_{BS} , $\star\omega_{BS}$ sur cette même base.

Remarque 3.20 Soient $\tilde{a}', \tilde{b}' \subset \overline{\mathcal{O}}$ deux courbes orientées de classe \mathcal{C}^1 par morceau dont seules les extrémités respectives $\tilde{a}'_0 \in [s_4, s_5]_h$, $\tilde{a}'_1 = g_1(\tilde{a}'_0)$, $\tilde{b}'_0 \in [s_6, s_7]_h$, $\tilde{b}'_1 = g_3(\tilde{b}'_0)$ appartiennent à $\partial\mathcal{O}$. En particulier, \tilde{a}', \tilde{b}' sont des relèvements de courbes appartenant respectivement aux classes d'homologie $[a], [b] \in H_1(M, \mathbb{Z})$. Alors

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{a}'} du_n &= 2 + e_n^{1, re}(\tilde{a}'_0), & \int_{\tilde{a}'} \star du_n &= e_n^{1, im}(\tilde{a}'_0), \\ \int_{\tilde{b}'} du_n &= 2\operatorname{Re}(\tau_n) + e_n^{3, re}(\tilde{b}'_0), & \int_{\tilde{b}'} \star du_n &= 2\operatorname{Im}(\tau_n) + e_n^{3, im}(\tilde{b}'_0), \end{aligned}$$

pour tout $n \geq 1$. En effet, grâce aux relations (3.19), nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{a}'} du_n &= u_n(g_1(\tilde{a}'_0)) - u_n(\tilde{a}'_0) = 2 + \operatorname{Re}(e_n^1(\tilde{a}'_0)), \\ \int_{\tilde{a}'} \star du_n &= \int_{\tilde{a}'} dv_n = v_n(g_1(\tilde{a}'_0)) - v_n(\tilde{a}'_0) = \operatorname{Im}(e_n^1(\tilde{a}'_0)), \\ \int_{\tilde{b}'} du_n &= u_n(g_3(\tilde{b}'_0)) - u_n(\tilde{b}'_0) = 2\operatorname{Re}(\tau_n) + \operatorname{Re}(e_n^3(\tilde{b}'_0)), \\ \int_{\tilde{b}'} \star du_n &= \int_{\tilde{b}'} dv_n = v_n(g_3(\tilde{b}'_0)) - v_n(\tilde{b}'_0) = 2\operatorname{Im}(\tau_n) + \operatorname{Im}(e_n^3(\tilde{b}'_0)). \end{aligned}$$

La Décomposition de Hodge de $(\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* du_n \in \mathcal{A}_1^2(M)$ donne

$$\begin{aligned} (\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* du_n &= \underbrace{((\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* du_n)_E \oplus ((\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* du_n)_{E^*} \oplus ((\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* du_n)_H}_{= ((\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* du_n)_{H^\perp}}. \end{aligned}$$

En montrant d'une part que

$$\|((\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* du_n)_{H^\perp}\|_M^2 = \|((\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* du_n)_E\|_M^2 + \|((\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* du_n)_{E^*}\|_M^2$$

converge vers zéro lorsque n tend vers l'infini et d'autre part que les fonctions holomorphes e_n convergent vers zéro, nous pourrions montrer, à l'aide des périodes de ω_{BS} , $\star\omega_{BS}$ sur $[a], [b]$, la convergence de $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$ vers τ_{BS} .

Afin de contrôler les parties exactes et co-exactes de $(\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* du_n$ nous souhaitons utiliser les majorations données dans le résultat suivant.

Proposition 3.21 Soient S une surface de Riemann compacte munie d'une métrique riemannienne conforme g et une forme différentielle $\omega \in \mathcal{A}_1^2(S) \cap \mathcal{C}^1$. Alors

$$\begin{aligned} \|\omega_{E^*}\|_S^2 &\leq \frac{\|d\omega\|_S^2}{\lambda_1(S)} \\ \|\omega_E\|_S^2 &\leq \frac{\|d\star\omega\|_S^2}{\lambda_1(S)} \end{aligned}$$

où $\lambda_1(S)$ est la première valeur propre non nulle du Laplacien sur S .

Preuve. Nous démontrons la première inégalité. La deuxième en découlera immédiatement puisque, par unicité de la décomposition de Hodge, l'opérateur étoile de Hodge est une isométrie de E dans E^* et de H dans H , et par conséquent

$$\star(\omega_E) = (\star\omega)_{E^*}.$$

Nous souhaitons majorer la composante co-exacte de ω , i.e. la composante de ω appartenant à E^* , l'adhérence dans $\mathcal{A}_1^2(S)$ de l'ensemble constitué des éléments $\star df$ avec $f \in \mathcal{C}_0^\infty(S, \mathbb{C}) = \mathcal{C}^\infty(S, \mathbb{C})$ (S est compacte). Soit donc $f \in \mathcal{C}^\infty(S, \mathbb{C})$ une fonction vérifiant $\|\star df\|_S = 1$. Puisque nous nous intéressons à

$$\star df = \star d(f + \text{constante}),$$

nous supposons en outre que la fonction f est de moyenne nulle, i.e. $\int_S f dS_g = 0$. Nous allons calculer le produit scalaire $(\omega, \star df)_S$. Nous avons successivement

$$\begin{aligned} |(\omega, \star df)_S|^2 &= |(\omega, \star d\star\star f)_S|^2 \\ &= |(d\omega, \star f)_S|^2 && \text{(Formule (2.30) avec } \alpha = \omega \text{ et } \beta = \star f) \\ &\leq \|d\omega\|_S^2 \cdot \|\star f\|_S^2 && \text{(Inégalité de Cauchy-Schwarz dans } \mathcal{A}_2^2(S)) \\ &= \|d\omega\|_S^2 \cdot \|f\|_S^2. \end{aligned}$$

La fonction f étant de moyenne nulle, le Quotient de Rayleigh (voir p. ex. [Lax02, Ch. 28]) donne

$$\lambda_1(S) \leq \frac{(\Delta_g f, f)_S}{\|f\|_S^2}$$

où $\lambda_1(S)$ est la première valeur propre non nulle du Laplacien sur S . Or, avec la Formule de Green (Formule (2.31)), nous obtenons

$$(\Delta_g f, f)_S = (df, df)_S = \|df\|_S^2 = \|\star df\|_S^2 = 1,$$

par hypothèse. Ainsi,

$$\|f\|_S^2 \leq \frac{1}{\lambda_1(S)}.$$

À l'aide de cette majoration, nous obtenons alors

$$|(\omega, \star df)_S|^2 \leq \frac{\|d\omega\|_S^2}{\lambda_1(S)}.$$

Et par suite, il vient

$$|(\omega, \alpha)_S|^2 \leq \frac{\|d\omega\|_S^2}{\lambda_1(S)},$$

pour tout $\alpha \in E^*$ vérifiant $\|\alpha\|_S = 1$. À l'aide de cette inégalité pour

$$\alpha = \frac{\omega_{E^*}}{\|\omega_{E^*}\|_S}$$

et en remarquant que

$$\left(\omega, \frac{\omega_{E^*}}{\|\omega_{E^*}\|_S}\right)_S = \left(\omega_{E^*}, \frac{\omega_{E^*}}{\|\omega_{E^*}\|_S}\right)_S = \|\omega_{E^*}\|_S,$$

il vient finalement

$$\|\omega_{E^*}\|_S^2 \leq \frac{\|d\omega\|_S^2}{\lambda_1(S)}$$

Et le théorème est démontré. \square

La forme différentielle $(\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* du_n$ n'étant pas de classe \mathcal{C}^1 sur M (elle n'est même pas continue), nous ne pouvons donc pas majorer ses parties exacte et co-exacte à l'aide de la proposition ci-dessus. Nous allons alors construire une forme différentielle ω^n sur M de classe \mathcal{C}^1 à partir de "morceaux" de $(\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* du_n$ "recollés" via une partition de l'unité. Nous donnons cette construction dans un cadre quelque peu plus général, mais au préalable nous démontrons le résultat suivant dont nous aurons besoin.

Lemme 3.22 *Soient S une surface de Riemann compacte munie d'une métrique riemannienne conforme g , $U \subset M$ un ouvert, φ une fonction de classe \mathcal{C}^1 définie au voisinage de l'adhérence de U et $\omega \in \mathcal{A}_1^2(S)$. Alors*

$$\|d\varphi \wedge \omega\|_U \leq \|d\varphi\|_{\infty, U} \|\omega\|_U$$

où $\|d\varphi\|_{\infty, U} = \sup_{p \in U} |d\varphi|_p$.

Preuve. Il s'agit d'une Inégalité de Hölder généralisée. En coordonnées locales au voisinage d'un point $p \in U$, nous avons

$$\begin{aligned} d\varphi &= \varphi_x dx + \varphi_y dy, \\ \omega &= f dx + g dy, \\ g &= \mu^2(dx^2 + dy^2), \\ dS_g &= \mu^2 dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} d\varphi \wedge \omega &= (\varphi_x dx + \varphi_y dy) \wedge (f dx + g dy) = (\varphi_x g - \varphi_y f) dx \wedge dy, \\ |d\varphi \wedge \omega|_p^2 &= \star \left((d\varphi \wedge \omega) \wedge \star(\overline{d\varphi \wedge \omega}) \right) \\ &= \star \left(\frac{|\varphi_x g - \varphi_y f|^2}{\mu^2} dx \wedge dy \right) \\ &= \frac{|\varphi_x g - \varphi_y f|^2}{\mu^4} \\ &\leq \frac{|\varphi_x|^2 + |\varphi_y|^2}{\mu^2} \cdot \frac{|f|^2 + |g|^2}{\mu^2} \quad (\text{Inégalité de Cauchy-Schwarz}) \\ &= |d\varphi|_p^2 \cdot |\omega|_p^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|d\varphi \wedge \omega\|_U^2 = \iint_U |d\varphi \wedge \omega|_p^2 dS_g \leq \|d\varphi\|_{\infty,U}^2 \iint_U |\omega|_p^2 dS_g = \|d\varphi\|_{\infty,U}^2 \|\omega\|_U^2.$$

D'où le lemme. \square

Soient S une surface de Riemann compacte munie d'une métrique riemannienne conforme g et $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_l\}$ un recouvrement d'ouverts connexes de S tel que toute intersection constituée d'éléments de \mathcal{U} soit une réunion finie d'ouverts connexes. Soient encore $\omega_1, \dots, \omega_l$ des formes différentielles de $\mathcal{A}_1^2(S)$ telles que $\omega_i|_{U_i}$ soit de classe \mathcal{C}^1 et $\omega_i|_{S \setminus U_i} = 0$, et $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_l\}$ une partition de l'unité de S subordonnée au recouvrement \mathcal{U} . Posons

$$\omega = \sum_{i=1}^l \varphi_i \omega_i \in \mathcal{A}_1^2(S) \cap \mathcal{C}^1.$$

Notons que la forme différentielle ω est bien de classe \mathcal{C}^1 sur S , car d'une part φ_i est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur S de support compacte inclus dans l'ouvert U_i et d'autre part ω_i est une forme différentielle de classe \mathcal{C}^1 sur U_i .

À présent, notons

$$\begin{aligned} n_{\mathcal{U}} & \quad \text{le nombre de composantes connexes de } S \setminus \bigcup_{i=1}^l \partial U_i, \\ \{V_j\}_{j=1}^{n_{\mathcal{U}}} & \quad \text{les composantes connexes de } S \setminus \bigcup_{i=1}^l \partial U_i, \\ I_j & \quad \text{le sous-ensemble maximal de } \{1, 2, \dots, l\} \text{ vérifiant } V_j \subset \bigcap_{i \in I_j} U_i, \\ k_j & \quad \text{l'élément maximal de } I_j. \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi

$$\bigcup_{j=1}^{n_{\mathcal{U}}} V_j \subset S \quad \text{et} \quad \bigcup_{j=1}^{n_{\mathcal{U}}} \overline{V_j} = S.$$

Lemme 3.23 *Si chaque ω_i est fermée (resp. co-fermée) sur U_i , alors la norme $\|d\omega\|_S$ (resp. $\|d\star\omega\|_S$) est majorée par*

$$c_{\Phi} \sum_{j=1}^{n_{\mathcal{U}}} \sum_{i \in I_j \setminus k_j} \|\omega_i - \omega_{k_j}\|_{V_j}$$

où $c_{\Phi} = \max_{i=1, \dots, l} \|d\varphi_i\|_{\infty, S} < \infty$.

Preuve. Supposons donc que chaque ω_i est fermée sur U_i . Sur V_j , nous avons alors

$$\begin{aligned}
d\omega|_{V_j} &= \sum_{i \in I_j} d(\varphi_i \omega_i) \\
&= \sum_{i \in I_j} \left\{ d\varphi_i \wedge \omega_i + (-1)^0 \varphi_i \wedge \underbrace{d\omega_i}_{=0} \right\} \quad (\omega_i \text{ fermée}) \\
&= \sum_{i \in I_j} d\varphi_i \wedge \omega_i \\
&= \sum_{i \in I_j \setminus k_j} d\varphi_i \wedge \omega_i + \sum_{i \in I_j \setminus k_j} (-d\varphi_i) \wedge \omega_{k_j} \\
&= \sum_{i \in I_j \setminus k_j} d\varphi_i \wedge (\omega_i - \omega_{k_j})
\end{aligned}$$

où l'avant-dernière égalité vient de $\sum_{i \in I_j} d\varphi_i = 0$ car $\sum_{i \in I_j} \varphi_i = 1$ sur V_j . Or, pour tout $i \in I_j$, nous avons (Lemme 3.22)

$$\begin{aligned}
\|d\varphi_i \wedge (\omega_i - \omega_{k_j})\|_{V_j} &\leq \|d\varphi_i\|_{\infty, V_j} \|\omega_i - \omega_{k_j}\|_{V_j} \\
&\leq \|d\varphi_i\|_{\infty, U_i} \|\omega_i - \omega_{k_j}\|_{V_j} \\
&\leq c_\Phi \|\omega_i - \omega_{k_j}\|_{V_j}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|d\omega\|_{V_j} \leq c_\Phi \sum_{i \in I_j \setminus k_j} \|\omega_i - \omega_{k_j}\|_{V_j}.$$

Et par suite,

$$\|d\omega\|_S = \sum_{j=1}^{n_{\mathcal{U}}} \|d\omega\|_{V_j} \leq c_\Phi \sum_{j=1}^{n_{\mathcal{U}}} \sum_{i \in I_j \setminus k_j} \|\omega_i - \omega_{k_j}\|_{V_j}.$$

Dans le cas où chaque ω_i est co-fermée sur U_i , nous appliquons l'inégalité ci-dessus et utilisons le fait que l'opérateur étoile de Hodge est une isométrie sur $\mathcal{A}_1^2(S)$. D'où le lemme. \square

Nous passons à présent à la construction des formes différentielles ω^n de classe \mathcal{C}^1 sur M . Notons $p_{2i} = \pi(m_{2i}) \in M = \mathbb{D}/G'$, $i = 1, \dots, 4$, les images des points milieu $m_{2i} \in \partial\mathcal{O}$ par la projection canonique $\pi : \mathbb{D} \rightarrow M$. Nous allons définir un recouvrement \mathcal{U} de M obtenu comme l'image par π d'un recouvrement de l'adhérence d'un domaine fondamental (pour

l'action de G' sur \mathbb{D}) différent de \mathcal{O} . Soient

$$\delta \in \left] 0, \tilde{\delta} \left[\cap \left] 0, \frac{1}{3} \min_{i,k} d_{hyp}(m_i, s_k) \right[,$$

$$\tilde{U}_1 = \mathcal{O} \setminus \overline{N_{\delta'}(\partial\mathcal{O})}, \quad (\text{cf. Figure 3.5})$$

$$\tilde{U}_{2i} = N_{\delta}([s_{2i-1}, m_{2i}]_h), \quad i = 1, \dots, 4, \quad (\text{cf. Figure 3.6})$$

$$\tilde{U}_3 = N_{\delta}([s_4, m_5]_h), \quad (\text{cf. Figure 3.7})$$

$$\tilde{U}_5 = N_{\delta}([m_5, s_5]_h),$$

$$\tilde{U}_7 = N_{\delta}([s_6, m_7]_h),$$

$$\tilde{U}_9 = N_{\delta}([m_7, s_7]_h),$$

où

$$\delta' \in]0, \delta''[,$$

$$\delta'' \text{ tel que } \sinh \delta'' = \sin \frac{\theta_{\min}}{2} \sinh \delta \quad (\text{cf. [Bus92, p. 454, Formule 2.2.2(iii)]}),$$

$$\theta_{\min} = \min_k \theta_k,$$

$$\theta_k = \text{angle intérieur du sommet } s_k \in \partial\mathcal{O},$$

afin que $\max_k d_{hyp}(\tilde{U}_1, s_k) < \delta$, et par suite $\max_{z \in \partial\mathcal{O}} d_{hyp}(\tilde{U}_1, z) < \delta$. Les définitions de δ', δ'' ont pour but de s'assurer de la construction, en fonction de δ , d'un recouvrement convenable d'un domaine fondamental pour l'action de G' sur \mathbb{D} .

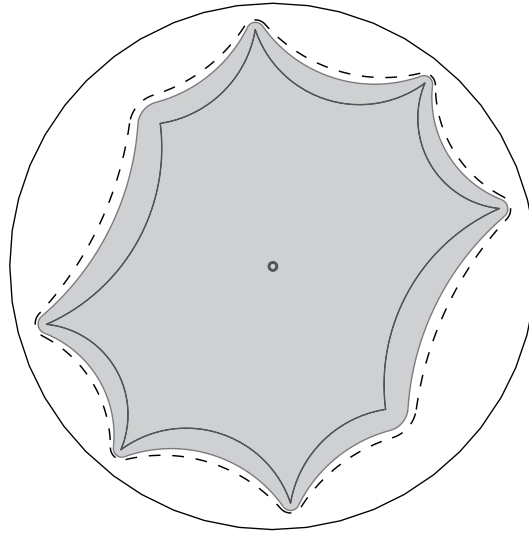
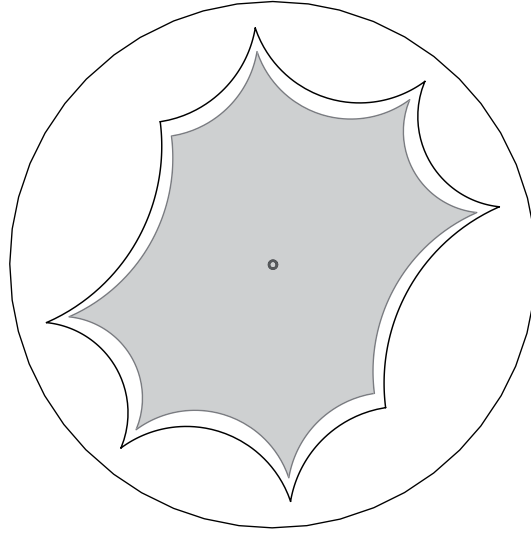
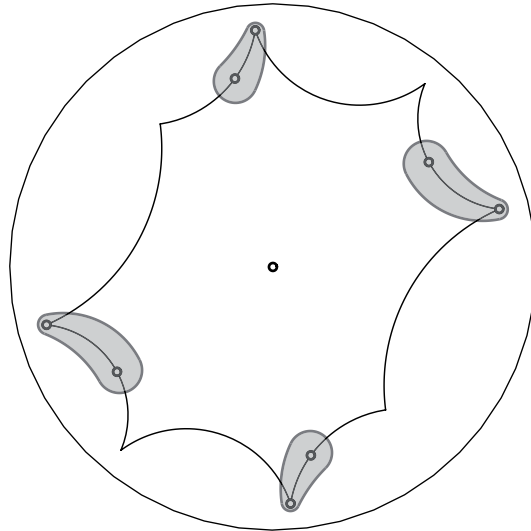


FIGURE 3.4. δ -voisinage $N_{\delta}(\mathcal{O})$. (En traitillé $\partial N_{\tilde{\delta}}(\mathcal{O})$.)

FIGURE 3.5. *Domaine $\tilde{U}_1 \subset \mathbb{D}$.*FIGURE 3.6. *Domaines $\tilde{U}_2, \tilde{U}_4, \tilde{U}_6, \tilde{U}_8 \subset \mathbb{D}$.*

Relevons aussi les inclusions suivantes qui sont immédiates (car $\delta < \tilde{\delta}$), mais qui seront cruciales dans la preuve du Théorème 3.33 afin de pouvoir appliquer le Lemme fondamental :

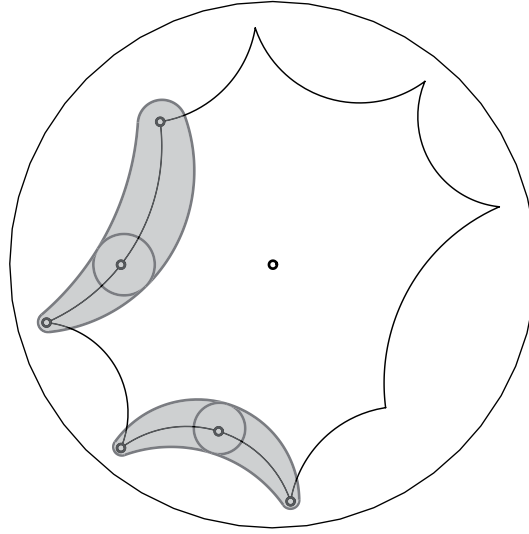
$$\tilde{U}_3 \subset\subset \tilde{D}_1^{\min}, \quad \tilde{U}_2 \subset\subset \tilde{D}_2^{\min}, \quad \tilde{U}_7 \subset\subset \tilde{D}_3^{\min}, \quad \tilde{U}_4 \subset\subset \tilde{D}_4^{\min}. \quad (3.24)$$

Puisque $\mathcal{O} = -\mathcal{O}$, nous avons $\tilde{U}_{2i+4} = -\tilde{U}_{2i}$ pour $i = 1, 2$. Nous notons

$$\tilde{\mathcal{U}} = \{\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_9\},$$

$$\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_9\} \quad \text{avec } U_i = \pi(\tilde{U}_i).$$

Puisque $\tilde{\mathcal{U}}$ recouvre l'adhérence d'un domaine fondamental pour l'action de G' sur \mathbb{D} , \mathcal{U} est bien un recouvrement de M . De plus, la restriction $\pi|_{\tilde{U}_{2i-1}}$ est un homéomorphisme pour

FIGURE 3.7. Domaines $\tilde{U}_3, \tilde{U}_5, \tilde{U}_7, \tilde{U}_9 \subset \mathbb{D}$.

$i = 1, \dots, 5$, et la restriction $\pi|_{\tilde{U}_{2i} \setminus N_\delta(m_{2i})}$ est un homéomorphisme pour $i = 1, \dots, 4$.

Soient $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_9\}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement \mathcal{U} et $\tilde{\varphi}_i : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}_+$ le relèvement dans \mathbb{D} de $\varphi_i : M \rightarrow \mathbb{R}_+$. Notons que $\tilde{\varphi}_i$ est G' -équivariante. Nous définissons, pour chaque $n \geq 1$,

$$\omega_{2i-1}^n = \begin{cases} \left(\pi|_{\tilde{U}_{2i-1}}^{-1} \right)^* du_n & \text{sur } U_{2i-1}, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 5,$$

$$\omega_{2i}^n = \begin{cases} \left(\pi|_{\tilde{U}_{2i}}^{-1} \right)^* \frac{du_n + h_{2i}^* du_n}{2} \stackrel{(3.19)}{=} \left(\pi|_{\tilde{U}_{2i}}^{-1} \right)^* \left(du_n + \frac{1}{2} de_n^{2i, re} \right) & \text{sur } U_{2i}, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 4.$$

Une remarque s'impose concernant la définition de ω_{2i}^n , car la restriction de π à la boule hyperbolique $N_\delta(m_{2i}) \subset \tilde{U}_{2i}$ centrée au point m_{2i} n'est pas bijective. Par conséquent, écrire $\pi|_{\tilde{U}_{2i}}^{-1}$ est un abus de notation, abus qui se justifie toutefois comme suit. Soient $p \in \pi(N_\delta(m_{2i})) \setminus \{p_{2i}\}$ et $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2 = h_{2i}(\tilde{p}_1)$ les deux préimages de p dans $N_\delta(m_{2i})$. Nous avons

$$h_{2i}^* \frac{du_n + h_{2i}^* du_n}{2}(\tilde{p}_1) = \frac{h_{2i}^* du_n + du_n}{2}(h_{2i}(\tilde{p}_1)) = \frac{du_n + h_{2i}^* du_n}{2}(\tilde{p}_2).$$

Ensuite, soient $\tilde{V}_1, \tilde{V}_2 = h_{2i}(\tilde{V}_1)$ des voisinages ouverts de \tilde{p}_1, \tilde{p}_2 respectivement qui sont inclus

dans $N_\delta(m_{2i})$ et sur lesquels la restriction de π est bijective. Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} \left(\pi|_{\tilde{V}_2}^{-1}\right)^* \frac{du_n + h_{2i}^* du_n}{2}(\tilde{p}_2) &= \left(\pi|_{\tilde{V}_2}^{-1}\right)^* h_{2i}^* \frac{du_n + h_{2i}^* du_n}{2}(\tilde{p}_1) \\ &= \left(h_{2i} \circ \pi|_{\tilde{V}_2}^{-1}\right)^* \frac{du_n + h_{2i}^* du_n}{2}(\tilde{p}_1) \\ &= \left(\pi|_{\tilde{V}_1}^{-1}\right)^* \frac{du_n + h_{2i}^* du_n}{2}(\tilde{p}_1). \end{aligned}$$

Au point $p = p_{2i} = \pi(m_{2i})$, la forme différentielle ω_{2i}^n s'annule car

$$\frac{du_n + h_{2i}^* du_n}{2}(m_{2i}) = 0.$$

En effet, nous avons en ce point

$$\begin{aligned} (h_{2i}^* du_n)_{m_{2i}} &= d(u_n \circ h_{2i})_{m_{2i}} \\ &= u'_n(h_{2i}(m_{2i})) \cdot h'_{2i}(m_{2i}) \cdot dz_{m_{2i}} \\ &= -u'_n(m_{2i}) \cdot dz_{m_{2i}} \quad (h_{2i}(m_{2i}) = m_{2i} \quad \text{et} \quad h'_{2i}(m_{2i}) = -1) \\ &= -du_{nm_{2i}}. \end{aligned}$$

Ainsi, ω_{2i}^n est bien définie et l'abus de notation se justifie.

Mentionnons encore que, par la Remarque 2.28 et puisque $\star du_n = dv_n$ (où $f_n = u_n + iv_n$) et $\star de_n^{2i, re} = de_n^{2i, im}$, nous avons pour chaque $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \star \omega_{2i-1}^n &= \begin{cases} \star \left(\pi|_{\tilde{U}_{2i-1}}^{-1}\right)^* du_n = \left(\pi|_{\tilde{U}_{2i-1}}^{-1}\right)^* dv_n & \text{sur } U_{2i-1}, \\ \star 0 = 0 & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 5, \\ \star \omega_{2i}^n &= \begin{cases} \star \left(\pi|_{\tilde{U}_{2i}}^{-1}\right)^* \frac{du_n + h_{2i}^* du_n}{2} \stackrel{(3.19)}{=} \left(\pi|_{\tilde{U}_{2i}}^{-1}\right)^* \left(dv_n + \frac{1}{2} de_n^{2i, im}\right) & \text{sur } U_{2i}, \\ \star 0 = 0 & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

Finalement, nous posons

$$\omega^n = \sum_{i=1}^9 \varphi_i \omega_i^n \in \mathcal{A}_1^2(M) \cap \mathcal{C}^1.$$

Rappelons que la forme différentielle ω^n ainsi définie est bien de classe \mathcal{C}^1 , car φ_i est de classe \mathcal{C}^∞ sur M et ω_i^n est de classe \mathcal{C}^1 dans \tilde{U}_i qui contient le support de φ_i .

Nous développons à présent quelques calculs concernant ω^n . Au vu de ce qui précède et de la Remarque 2.28, ces calculs seront aussi valables pour $\star \omega^n$ en remplaçant toutefois l'expression *parties réelles* par *parties imaginaires* et du_n par $dv_n = \star du_n$.

Nous allons calculer l'expression de ω^n dans la carte $(\pi(\mathcal{O}), \pi|_{\mathcal{O}}^{-1})$ de M , autrement dit le pullback de ω^n dans \mathcal{O} via $\pi|_{\mathcal{O}}^{-1}$. Nous calculons tout d'abord

$$\begin{aligned}
(\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* \omega_{2i-1}^n &= \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_{2i-1}) \cap \mathcal{O}} g^* du_n, \\
&\stackrel{(*)}{=} \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_{2i-1}) \cap \mathcal{O}} (du_n + F_{n,g}), \\
&\stackrel{(**)}{=} 1_{\pi^{-1}(U_{2i-1}) \cap \mathcal{O}} du_n + \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_{2i-1}) \cap \mathcal{O}} F_{n,g},
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
(\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* \omega_{2i}^n &= \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_{2i}) \cap \mathcal{O}} g^* \left(du_n + \frac{1}{2} de_n^{2i, re} \right) \\
&\stackrel{(*)}{=} \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_{2i}) \cap \mathcal{O}} (du_n + F_{n,g}) + \frac{1}{2} \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_{2i}) \cap \mathcal{O}} g^* de_n^{2i, re} \\
&\stackrel{(**)}{=} 1_{\pi^{-1}(U_{2i}) \cap \mathcal{O}} du_n + \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_{2i}) \cap \mathcal{O}} F_{n,g} + \frac{1}{2} \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_{2i}) \cap \mathcal{O}} g^* de_n^{2i, re}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

où l'égalité (*) vient, grâce aux relations (3.19), de la décomposition

$$g^* du_n = du_n + F_{n,g}$$

avec $F_{n,g}$ une somme de pullbacks de formes différentielles, prises parmi les parties réelles de

$$de_n^1, de_n^3, de_n^2, de_n^4, de_n^6, de_n^8,$$

par une composition d'éléments de $\{g_1^{\pm 1}, g_3^{\pm 1}, h_2, h_4, h_6, h_8\}$. L'égalité (**), quant elle, vient du fait que $\sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_i)} = 1$ sur $\pi^{-1}(U_i) \cap \mathcal{O}$. Notons encore que les sommes ci-dessus n'admettent qu'un nombre fini de termes non nuls, que $F_{n,g} = g^* du_n - du_n = d(u_n \circ g - u_n)$ et que $F_{n,id} = 0$.

Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned}
(\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* \omega^n &= (\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* \left(\sum_{i=1}^9 \varphi_i \omega_i^n \right) \\
&= \sum_{i=1}^9 (\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* \varphi_i \cdot (\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* \omega_i^n \\
&= \sum_{i=1}^9 \tilde{\varphi}_i|_{\mathcal{O}} \cdot (\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* \omega_i^n \\
&\stackrel{(\bullet)}{=} \sum_{i=1}^9 \tilde{\varphi}_i 1_{\pi^{-1}(U_i) \cap \mathcal{O}} du_n + \sum_{i=2}^9 \tilde{\varphi}_i \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_i) \cap \mathcal{O}} F_{n,g} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \tilde{\varphi}_{2i} \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_{2i}) \cap \mathcal{O}} g^* de_n^{2i, re} \\
&\stackrel{(\bullet\bullet)}{=} du_n|_{\mathcal{O}} + \sum_{i=2}^9 \tilde{\varphi}_i \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_i) \cap \mathcal{O}} F_{n,g} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \tilde{\varphi}_{2i} \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_{2i}) \cap \mathcal{O}} g^* de_n^{2i, re},
\end{aligned}$$

où l'égalité (\bullet) vient d'une part des Égalités (3.25), (3.26), et d'autre part du fait que $\tilde{U}_1 \subset \mathcal{O}$ et $F_{n, id} = 0$ et donc que $\sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_1)} = 1_{\tilde{U}_1}$. L'égalité $(\bullet\bullet)$ vient du fait que $\tilde{\varphi}_i 1_{\pi^{-1}(U_i) \cap \mathcal{O}} = \tilde{\varphi}_i|_{\mathcal{O}}$ car l'intersection du support de $\tilde{\varphi}_i$ avec \mathcal{O} n'est autre que $\pi^{-1}(U_i) \cap \mathcal{O}$. Nous obtenons ainsi

$$(\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* \omega^n = du_n|_{\mathcal{O}} + \sum_{i=2}^9 \tilde{\varphi}_i \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_i) \cap \mathcal{O}} F_{n,g} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \tilde{\varphi}_{2i} \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_{2i}) \cap \mathcal{O}} g^* de_n^{2i, re}. \quad (3.27)$$

$$(\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* (\star \omega^n) = dv_n|_{\mathcal{O}} + \sum_{i=2}^9 \tilde{\varphi}_i \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_i) \cap \mathcal{O}} \star F_{n,g} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \tilde{\varphi}_{2i} \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_{2i}) \cap \mathcal{O}} g^* de_n^{2i, im}. \quad (3.28)$$

À présent, soit $\tilde{\gamma} \subset \overline{\mathcal{O}}$ une courbe de classe \mathcal{C}^1 par morceau dont seules les extrémités, notées $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1 = g(\tilde{\gamma}_0)$ avec $g \in G'$, appartiennent à $\partial \mathcal{O}$. En particulier, $\tilde{\gamma}$ est un relèvement de la courbe fermée $\gamma = \pi(\tilde{\gamma})$ sur M . Nous obtenons alors

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega^n = \int_{\tilde{\gamma}} du_n + \sum_{i=2}^9 \int_{\tilde{\gamma}} \tilde{\varphi}_i \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_i)} F_{n,g} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \int_{\tilde{\gamma}} \tilde{\varphi}_{2i} \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_{2i})} g^* de_n^{2i, re}, \quad (3.29)$$

$$\int_{\tilde{\gamma}} \star \omega^n = \int_{\tilde{\gamma}} dv_n + \sum_{i=2}^9 \int_{\tilde{\gamma}} \tilde{\varphi}_i \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_i)} \star F_{n,g} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \int_{\tilde{\gamma}} \tilde{\varphi}_{2i} \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_{2i})} g^* de_n^{2i, im}. \quad (3.30)$$

Exemple 3.31 Nous calculons l'intégrale de ω^n sur la courbe $a = \pi(\tilde{a})$ avec $\tilde{a} = [m_5, m_1]_h$.

$$\begin{aligned} (\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* \omega^n|_{\tilde{a}} &= du_n|_{\tilde{a}} + \sum_{i=2}^9 \tilde{\varphi}_i \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_i) \cap \tilde{a}} F_{n,g} \\ &= du_n|_{\tilde{a}} + \sum_{i \in \{3,5\}} \tilde{\varphi}_i 1_{g_1^{-1}(\tilde{U}_i) \cap \tilde{a}} de_n^{1,re}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_a \omega^n &= \int_{\tilde{a}} du_n + \sum_{i \in \{3,5\}} \int_{\tilde{a}} \tilde{\varphi}_i 1_{g_1^{-1}(\tilde{U}_i)} de_n^{1,re} \\ &= u_n(g_1(\tilde{a}_0)) - u_n(\tilde{a}_0) + \sum_{i \in \{3,5\}} \int_{g_1^{-1}(\tilde{U}_i) \cap \tilde{a}} \tilde{\varphi}_i de_n^{1,re} \quad (\tilde{a}_0 = m_5) \\ &= 2 + e_n^{1,re}(\tilde{a}_0) + \sum_{i \in \{3,5\}} \int_{g_1^{-1}(\tilde{U}_i) \cap \tilde{a}} \tilde{\varphi}_i de_n^{1,re} \quad (\text{grâce à (3.19)}). \end{aligned}$$

Les Formules (3.29), (3.30) avec la Remarque 3.20 donnent alors le résultat suivant.

Lemme 3.32 Soient $\tilde{a}', \tilde{b}' \subset \overline{\mathcal{O}}$ deux courbes orientées de classe \mathcal{C}^1 dont seules les extrémités, notées $\tilde{a}'_0 \in [s_4, s_5]_h, \tilde{a}'_1 = g_1(\tilde{a}'_0), \tilde{b}'_0 \in [s_6, s_7]_h, \tilde{b}'_1 = g_3(\tilde{b}'_0)$, appartiennent à $\partial\mathcal{O}$. En particulier, \tilde{a}', \tilde{b}' sont des relèvements de courbes fermées appartenant respectivement aux classes d'homologie $[a], [b]$ de M . Alors

$$\begin{aligned} \int_{\pi(\tilde{a}')} \omega^n &= 2 + e_n^{1,re}(\tilde{a}'_0) \\ &\quad + \sum_{i=2}^9 \int_{\tilde{a}'} \tilde{\varphi}_i \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_i)} F_{n,g} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \int_{\tilde{a}'} \tilde{\varphi}_{2i} \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_{2i})} g^* de_n^{2i,re}, \\ \int_{\pi(\tilde{a}')} \star \omega^n &= e_n^{1,im}(\tilde{a}'_0) \\ &\quad + \sum_{i=2}^9 \int_{\tilde{a}'} \tilde{\varphi}_i \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_i)} \star F_{n,g} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \int_{\tilde{a}'} \tilde{\varphi}_{2i} \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_{2i})} g^* de_n^{2i,im}, \\ \int_{\pi(\tilde{b}')} \omega^n &= 2\text{Re}(\tau_n) + e_n^{3,re}(\tilde{b}'_0) \\ &\quad + \sum_{i=2}^9 \int_{\tilde{b}'} \tilde{\varphi}_i \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_i)} F_{n,g} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \int_{\tilde{b}'} \tilde{\varphi}_{2i} \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_{2i})} g^* de_n^{2i,re}, \\ \int_{\pi(\tilde{b}')} \star \omega^n &= 2\text{Im}(\tau_n) + e_n^{3,im}(\tilde{b}'_0) \\ &\quad + \sum_{i=2}^9 \int_{\tilde{b}'} \tilde{\varphi}_i \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_i)} \star F_{n,g} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \int_{\tilde{b}'} \tilde{\varphi}_{2i} \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_{2i})} g^* de_n^{2i,im}, \end{aligned}$$

pour tout $n \geq 1$.

Théorème 3.33 Soit une suite d'approximations $\{(\tau_n, f_n)\}_{n \geq 1} \subset X = \mathbb{C} \times L_{imp}^2(\tilde{D})$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_Y(\tau_n, f_n) = 0$. Alors il existe des courbes $a' \in [a], b' \in [b]$ et des suites

$$\{\varepsilon_{n,a'}\}_{n \geq 1}, \{\varepsilon_{n,a'}^*\}_{n \geq 1}, \{\varepsilon_{n,b'}\}_{n \geq 1}, \{\varepsilon_{n,b'}^*\}_{n \geq 1}, \{\varepsilon_{n,a'}^\perp\}_{n \geq 1}, \{\varepsilon_{n,a'}^{\perp,*}\}_{n \geq 1}, \{\varepsilon_{n,b'}^\perp\}_{n \geq 1}, \{\varepsilon_{n,b'}^{\perp,*}\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$$

convergeant vers 0 telles que

$$\begin{aligned} \int_{a'} \omega^n &= 2 + \varepsilon_{n,a'}, & \int_{a'} \star \omega^n &= \varepsilon_{n,a'}^*, \\ \int_{b'} \omega^n &= 2\operatorname{Re}(\tau_n) + \varepsilon_{n,b'}, & \int_{b'} \star \omega^n &= 2\operatorname{Im}(\tau_n) + \varepsilon_{n,b'}^*, \\ \int_{a'} \omega_{H^\perp}^n &= \varepsilon_{n,a'}^\perp, & \int_{a'} \star \omega_{H^\perp}^n &= \varepsilon_{n,a'}^{\perp,*}, \\ \int_{b'} \omega_{H^\perp}^n &= \varepsilon_{n,b'}^\perp, & \int_{b'} \star \omega_{H^\perp}^n &= \varepsilon_{n,b'}^{\perp,*}. \end{aligned}$$

pour tout $n \geq 1$.

Preuve. Nous commençons par noter que

$$\begin{aligned} \varphi_Y(\tau_n, f_n) &= \|\psi(\tau_n, f_n) - (2, 0, 0, 0)\|_Y^2 \\ &= \|f_n \circ g_1 - f_n - 2\|_{\tilde{D}_1^{\min}}^2 + \|f_n \circ h_2 - f_n\|_{\tilde{D}_2^{\min}}^2 \\ &\quad + \|f_n \circ g_3 - f_n - 2\tau_n\|_{\tilde{D}_3^{\min}}^2 + \|f_n \circ h_4 - f_n\|_{\tilde{D}_4^{\min}}^2 \\ &\stackrel{(3.19)}{=} \|e_n^1\|_{\tilde{D}_1^{\min}}^2 + \|e_n^2\|_{\tilde{D}_2^{\min}}^2 + \|e_n^3\|_{\tilde{D}_3^{\min}}^2 + \|e_n^4\|_{\tilde{D}_4^{\min}}^2. \end{aligned}$$

Grâce au Lemme fondamental, les fonctions holomorphes $e_n^1, e_n^2, e_n^3, e_n^4$ convergent vers zéro localement uniformément dans $\tilde{D}_1^{\min}, \tilde{D}_2^{\min}, \tilde{D}_3^{\min}, \tilde{D}_4^{\min}$ respectivement. De plus, par la Formule intégrale de Cauchy et le Lemme fondamental, les dérivées $e_n^{1(k)}, e_n^{2(k)}, e_n^{3(k)}, e_n^{4(k)}$ convergent aussi vers zéro localement uniformément dans $\tilde{D}_1^{\min}, \tilde{D}_2^{\min}, \tilde{D}_3^{\min}, \tilde{D}_4^{\min}$ respectivement, pour tout $k \geq 1$ (Théorème de Weierstrass). Par conséquent, au vu des inclusions (3.24) et de la Remarque 3.9.b), nous obtenons, pour les dérivées premières $e_n^{1'}, e_n^{2'}, e_n^{3'}, e_n^{4'}, e_n^{6'}, e_n^{8'}$, les convergences suivantes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_n^{1'}\|_{\infty, \tilde{U}_3 \cup \tilde{U}_5} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|e_n^{2'}\|_{\infty, \tilde{U}_2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|e_n^{3'}\|_{\infty, \tilde{U}_7 \cup \tilde{U}_9} = 0, \quad (3.34)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_n^{4'}\|_{\infty, \tilde{U}_4} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|e_n^{6'}\|_{\infty, \tilde{U}_6} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|e_n^{8'}\|_{\infty, \tilde{U}_8} = 0,$$

où $\|e_n^{j'}\|_{\infty, \tilde{U}} = \sup_{z \in \tilde{U}} |e_n^{j'}(z)|$. Autrement dit, ces premières dérivées convergent uniformément vers zéro sur l'adhérence des domaines respectifs ci-dessus.

Nous démontrons tout d'abord la partie concernant les quatre premières égalités, i.e. les quatre égalités concernant $\omega^n, \star \omega^n$, et ensuite la partie concernant les quatre égalités avec les parties

non harmoniques de $\omega^n, \star\omega^n$.

Partie des quatre premières égalités. L'idée pour cette partie de la démonstration est d'utiliser le Lemme 3.32 et les Égalités (3.34). Soient donc $\tilde{a}', \tilde{b}' \subset \overline{\mathcal{O}}$ deux courbes orientées de classe \mathcal{C}^1 dont seules les extrémités, notées $\tilde{a}'_0 \in [s_4, s_5]_h, \tilde{a}'_1 = g_1(\tilde{a}'_0), \tilde{b}'_0 \in [s_6, s_7]_h, \tilde{b}'_1 = g_3(\tilde{b}'_0)$, appartiennent à $\partial\mathcal{O}$. En particulier, $\pi(\tilde{a}') \in [a], \pi(\tilde{b}') \in [b]$. Nous définissons alors les suites

$$\{\varepsilon_{n,\tilde{a}'}\}_{n \geq 1}, \{\varepsilon_{n,\tilde{a}'}^*\}_{n \geq 1}, \{\varepsilon_{n,\tilde{b}'}\}_{n \geq 1}, \{\varepsilon_{n,\tilde{b}'}^*\}_{n \geq 1}$$

par

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n,\tilde{a}'} &= e_n^{1,re}(\tilde{a}'_0) + \sum_{i=2}^9 \int_{\tilde{a}'} \tilde{\varphi}_i \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_i)} F_{n,g} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \int_{\tilde{a}'} \tilde{\varphi}_{2i} \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_{2i})} g^* de_n^{2i,re}, \\ \varepsilon_{n,\tilde{a}'}^* &= e_n^{1,im}(\tilde{a}'_0) + \sum_{i=2}^9 \int_{\tilde{a}'} \tilde{\varphi}_i \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_i)} \star F_{n,g} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \int_{\tilde{a}'} \tilde{\varphi}_{2i} \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_{2i})} g^* de_n^{2i,im}, \\ \varepsilon_{n,\tilde{b}'} &= e_n^{3,re}(\tilde{b}'_0) + \sum_{i=2}^9 \int_{\tilde{b}'} \tilde{\varphi}_i \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_i)} F_{n,g} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \int_{\tilde{b}'} \tilde{\varphi}_{2i} \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_{2i})} g^* de_n^{2i,re}, \\ \varepsilon_{n,\tilde{b}'}^* &= e_n^{3,im}(\tilde{b}'_0) + \sum_{i=2}^9 \int_{\tilde{b}'} \tilde{\varphi}_i \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_i)} \star F_{n,g} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \int_{\tilde{b}'} \tilde{\varphi}_{2i} \sum_{g \in G'} 1_{g^{-1}(\tilde{U}_{2i})} g^* de_n^{2i,im}. \end{aligned}$$

Or, ces quatre suites convergent vers zéro. En effet, d'une part, au vu des Égalités (3.34), les dérivées premières $e_n^{1'}, e_n^{2'}, e_n^{3'}, e_n^{4'}, e_n^{6'}, e_n^{8'}$ convergent, en particulier, ponctuellement vers zéro (sur leur domaine respectif). D'autre part, pour tout $j \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ et tout $g \in G'$, nous avons

$$\begin{aligned} g^* de_n^j &= g^* de_n^{j,re} + ig^* de_n^{j,im}, \\ g^* de_n^j &= d(e_n^j \circ g) = e_n^{j'} \circ g \cdot g' dz. \end{aligned}$$

Par conséquent, les coefficients des formes différentielles $g^* de_n^{2i,re}, g^* de_n^{2i,im}$ et $F_{n,g}$ convergent, sur leur domaine respectif, ponctuellement vers zéro. Le Lemme 3.32 permet ensuite de conclure que les quatre première égalités du théorème sont bien vérifiées.

Partie des quatre dernières égalités. L'idée pour cette partie de la démonstration est d'utiliser la Proposition 3.21 et le Lemme 3.23 afin de montrer que la partie non harmonique de ω^n converge vers zéro dans $\mathcal{A}_1^2(M)$. Ensuite, nous démontrons que supposer l'inexistence de courbes $a' \in [a], b' \in [b]$ telles que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a'} \omega_{H^\perp}^n &= 0, & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a'} \star \omega_{H^\perp}^n &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{b'} \omega_{H^\perp}^n &= 0, & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{b'} \star \omega_{H^\perp}^n &= 0. \end{aligned}$$

mène à une contradiction avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_{H^\perp}^n\|_M = 0$.

Une égalité utile. Soient $\alpha \in \mathcal{A}_1^2(M)$ et $U \subset M$ un ouvert. Nous avons l'égalité

$$\|\alpha\|_U = \|\pi^*\alpha\|_{\pi|_{\mathcal{O}}^{-1}(U)}, \quad (3.35)$$

où $\pi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}/G'$ est la projection canonique. En effet, nous avons

$$\begin{aligned} \|\alpha\|_U^2 &= \iint_U \alpha \wedge \star \bar{\alpha} \\ &= \iint_{\pi|_{\mathcal{O}}^{-1}(U)} \pi^*(\alpha \wedge \star \bar{\alpha}) \\ &= \iint_{\pi|_{\mathcal{O}}^{-1}(U)} \pi^*\alpha \wedge \pi^*(\star \bar{\alpha}) \\ &= \iint_{\pi|_{\mathcal{O}}^{-1}(U)} \pi^*\alpha \wedge \star \overline{\pi^*\alpha} \quad (\text{grâce à la Remarque 2.28}) \\ &= \|\pi^*\alpha\|_{\pi|_{\mathcal{O}}^{-1}(U)}^2. \end{aligned}$$

Convergence vers zéro de la partie non harmonique de ω^n . Puisque $\omega^n \in \mathcal{A}_1^2(M) \cap \mathcal{C}^1$ et que chaque ω_i^n est harmonique sur U_i , $i = 1, \dots, 9$, nous pouvons appliquer la Proposition 3.21 et le Lemme 3.23. Il vient alors (avec la notation introduite juste avant le Lemme 3.23)

$$\begin{aligned} \|\omega_{E^*}^n\|_M^2 &\leq \frac{\|d\omega^n\|_M^2}{\lambda_1(M)} \leq \frac{1}{\lambda_1(M)} \left(c_\Phi \sum_{j=1}^{n_U} \sum_{i \in I_j \setminus k_j} \|\omega_i^n - \omega_{k_j}^n\|_{V_j} \right)^2, \\ \|\omega_E^n\|_M^2 &\leq \frac{\|d\star\omega^n\|_M^2}{\lambda_1(M)} \leq \frac{1}{\lambda_1(M)} \left(c_\Phi \sum_{j=1}^{n_U} \sum_{i \in I_j \setminus k_j} \|\omega_i^n - \omega_{k_j}^n\|_{V_j} \right)^2, \end{aligned}$$

où $c_\Phi = \max_{i=1, \dots, 9} \|d\varphi_i\|_{\infty, M} < \infty$.

Or, pour tout $j = 1, \dots, n_U$ et tout $i \in I_j \setminus k_j$, les Égalités (3.35), (3.25), (3.26) et (3.34) donnent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_i^n - \omega_{k_j}^n\|_{V_j} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* \omega_i^n - (\pi|_{\mathcal{O}}^{-1})^* \omega_{k_j}^n\|_{\pi|_{\mathcal{O}}^{-1}(V_j)} = 0.$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_{H^\perp}^n\|_M^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|\omega_E^n\|_M^2 + \|\omega_{E^*}^n\|_M^2) = 0.$$

À présent, nous allons démontrer qu'il existe des courbes $a' \in [a], b' \in [b]$ telles que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a'} \omega_{H^\perp}^n &= 0, & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a'} \star \omega_{H^\perp}^n &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{b'} \omega_{H^\perp}^n &= 0, & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{b'} \star \omega_{H^\perp}^n &= 0. \end{aligned}$$

Nous démontrons l'existence d'une telle courbe $a' \in [a]$. La démonstration pour l'existence d'une telle courbe $b' \in [b]$ est similaire. Nous procédons par l'absurde. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite d'indices $\{n_i\}_{i \geq 1} \subset \mathbb{N}$ tels que

$$\varepsilon < \left| \int_{a'} \omega_{H^\perp}^{n_i} \right| \quad \text{ou} \quad \varepsilon < \left| \int_{a'} \star \omega_{H^\perp}^{n_i} \right|$$

pour toute courbe $a' \in [a]$ et tout $i \geq 1$.

Construction d'une contradiction. Rappelons que $\iota : M = \mathbb{D}/G' \longrightarrow \mathbb{C}/\Lambda_{\tau_{BS}}$ est l'application biholomorphe telle que $\iota(\pi(0)) = \pi_{\tau_{BS}}(0)$ où $\Lambda_{\tau_{BS}} \subset \mathbb{C}$ est le réseau euclidien engendré par $2, 2\tau_{BS}$, que $\pi_{\tau_{BS}} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\Lambda_{\tau_{BS}}$ est la projection canonique et que M est muni de la métrique euclidienne à l'aide de ces deux applications (Remarque 2.48). Soient

$$\eta \in]0, 1[,$$

$$B = \{z = s + t\tau_{BS} \mid s \in]0, 1[, t \in]-\eta, \eta[\} \subset \mathbb{C},$$

$$\Gamma : \overline{B} \longrightarrow \mathbb{D}/G' \quad \text{l'application holomorphe définie par } \Gamma = \iota^{-1} \circ \pi_{\tau_{BS}}.$$

Notons que $\Gamma|_B$ est biholomorphe et qu'ainsi $(\Gamma(B), \Gamma|_B^{-1})$ est une carte de la structure conforme de M dans laquelle la forme volume s'exprime par $dx \wedge dy$, avec $z = x + iy \in B$. De plus, Γ est une variation de courbes telle que $\Gamma([0, 1] + t\tau_{BS}) \in [a]$ pour tout $t \in [-\eta, \eta]$.

Nous notons $f(z)dx + g(z)dy$, avec $z = x + iy$, l'expression locale de $\omega_{H^\perp}^n$ dans la carte $(\Gamma(B), \Gamma|_B^{-1})$. Pour tout $t \in]-\eta, \eta[$ et tout $n \geq 1$, nous avons alors

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma([-1, 1] + t\tau_{BS})} \omega_{H^\perp}^n \right| &= \left| \int_{[-1, 1] + t\tau_{BS}} \Gamma^* \omega_{H^\perp}^n \right| \\ &= \left| \int_{[-1, 1] + t\tau_{BS}} f(z)dx + g(z)dy \right| \quad (z = x + iy) \\ &= \left| \int_{-1}^1 (f(s + t\tau_{BS}) \cdot 1 + g(s + t\tau_{BS}) \cdot 0) ds \right| \quad (\text{avec } s \longmapsto z = s + t\tau_{BS}) \\ &\leq \int_{-1}^1 |f(s + t\tau_{BS})| ds \\ &\leq \int_{-1}^1 \sqrt{|f(s + t\tau_{BS})|^2 + |g(s + t\tau_{BS})|^2} ds \\ &= \int_{-1}^1 |\omega_{H^\perp}^n|_{\Gamma(s + t\tau_{BS})} ds \quad (\text{car } \Gamma^* dM_g = dx \wedge dy). \end{aligned}$$

De manière similaire, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma([-1, 1] + t\tau_{BS})} \star \omega_{H^\perp}^n \right| &\leq \int_{-1}^1 |-g(s + t\tau_{BS})| ds \\ &\leq \int_{-1}^1 |\omega_{H^\perp}^n|_{\Gamma(s + t\tau_{BS})} ds. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $i \geq 1$ et tout $t \in]-\eta, \eta[$, nous avons par hypothèse

$$\varepsilon < \int_{-1}^1 |\omega_{H^\perp}^{n_i}|_{\Gamma(s+t\tau_{\text{BS}})} ds.$$

Et par suite,

$$\begin{aligned} 2\eta \cdot \varepsilon &< \int_{-\eta}^{\eta} \int_{-1}^1 |\omega_{H^\perp}^{n_i}|_{\Gamma(s+t\tau_{\text{BS}})} ds dt \\ &\leq \left(\int_{-\eta}^{\eta} \int_{-1}^1 ds dt \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{-\eta}^{\eta} \int_{-1}^1 |\omega_{H^\perp}^{n_i}|_{\Gamma(s+t\tau_{\text{BS}})}^2 ds dt \right)^{1/2} \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &= \sqrt{4\eta} \cdot \left(\int_{-\eta}^{\eta} \int_{-1}^1 |\omega_{H^\perp}^{n_i}|_{\Gamma(s+t\tau_{\text{BS}})}^2 ds dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \geq 1$, nous avons

$$\begin{aligned} \|\omega_{H^\perp}^n\|_{\Gamma(B)}^2 &= \|\Gamma^* \omega_{H^\perp}^n\|_B^2 \quad (\text{arguments identiques à ceux pour (3.35)}) \\ &= \iint_B |\omega_{H^\perp}^n|_{\Gamma(z)}^2 dx \wedge dy \quad (\text{car } \Gamma^* dM_g = dx \wedge dy) \\ &= \text{Im}(\tau_{\text{BS}}) \cdot \int_{-\eta}^{\eta} \int_{-1}^1 |\omega_{H^\perp}^n|_{\Gamma(s+t\tau_{\text{BS}})}^2 ds dt, \end{aligned}$$

où la dernière égalité vient du changement de variables

$$(s, t) \longmapsto z = s + t\tau_{\text{BS}} = (s + t\text{Re}(\tau_{\text{BS}})) + it\text{Im}(\tau_{\text{BS}}),$$

avec $(s, t) \in]0, 1[\times]-\eta, \eta[$, dont le déterminant de la matrice jacobienne est

$$J(s, t) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \text{Re}(\tau_{\text{BS}}) & \text{Im}(\tau_{\text{BS}}) \end{pmatrix} = \text{Im}(\tau_{\text{BS}}) > 0.$$

Ainsi, pour $i \geq 1$, nous obtenons finalement

$$0 < \varepsilon < \frac{2}{\sqrt{\text{Im}(\tau_{\text{BS}})}} \|\omega_{H^\perp}^{n_i}\|_{\Gamma(B)}.$$

Mais cela est une contradiction avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_{H^\perp}^n\|_M = 0$. L'existence d'une courbe $a' \in [a]$ ayant les propriétés recherchées est ainsi démontrée.

Finalement, notons que nous pouvons supposer que les courbes a', b' satisfont les hypothèses du Lemme 3.32. Ainsi, le théorème est démontré. \square

Remarque 3.36 Si les approximations f_n de f_{BS} ne sont pas supposées impaires (i.e. $f_n \in L_0^2(\tilde{D})$ au lieu de $f_n \in L_{\text{imp}}^2(\tilde{D})$) et que les espaces X, Y , l'opérateur ψ et la fonctionnelle φ_Y sont adaptés selon la Remarque 3.9.c), alors la conclusion du Théorème 3.33 reste valable.

3.2.3 Convergence de la suite $\{t_n\}_{n \geq 1}$

Nous reprenons les définitions et notations du paragraphe précédent, et rappelons que $\{\alpha, \beta\}$ est la base de H duale à la base canonique d'homologie de M formée par $[a], [b]$. Soit $n \geq 1$. Il existe alors des coefficients $c_{n,\alpha}, c_{n,\beta} \in \mathbb{C}$ tels que $\omega_H^n = c_{n,\alpha}\alpha + c_{n,\beta}\beta$. Puisque α, β, ω^n sont des formes différentielles réelles, $c_{n,\alpha}, c_{n,\beta}$ sont aussi réels. Nous avons alors les décompositions

$$\begin{aligned}\omega^n &= c_{n,\alpha}\alpha + c_{n,\beta}\beta + \omega_{H^\perp}^n, \\ \star\omega^n &= c_{n,\alpha}\star\alpha + c_{n,\beta}\star\beta + \star\omega_{H^\perp}^n.\end{aligned}$$

Rappelons que, par hypothèse, la suite $\{(t_n, h_n)\}_{n \geq 1} \subset X = \mathbb{C} \times L_{\text{imp}}^2(\tilde{D})$ vérifie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi(t_n, h_n)\|_Y^2 = 0.$$

Théorème 3.37 *La suite $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{C}$ converge vers 0. De manière équivalente, la suite $\{\tau_n = t_n + \tau_{\text{BS}}\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{C}$ converge vers τ_{BS} .*

Preuve. Nous commençons par exprimer les coefficients $c_{n,\alpha}, c_{n,\beta}$ et ensuite nous démontrons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Re}(\tau_n) = \text{Re}(\tau_{\text{BS}})$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Im}(\tau_n) = \text{Im}(\tau_{\text{BS}})$, ce qui équivaut à démontrer la convergence de $\{t_n\}_{n \geq 1}$ vers zéro. Nous partons des identités du Théorème 3.33 ainsi que des décompositions de $\omega^n, \star\omega^n$ données ci-dessus.

Calcul de $c_{n,\alpha}$.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n,a'} + 2 &= \int_{a'} \omega^n = c_{n,\alpha} + \int_{a'} \omega_{H^\perp}^n \\ \implies c_{n,\alpha} &= 2 + \left(\varepsilon_{n,a'} - \int_{a'} \omega_{H^\perp}^n \right) \\ \implies \lim_{n \rightarrow \infty} c_{n,\alpha} &= 2.\end{aligned}$$

Calcul de $c_{n,\beta}$.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n,a'}^* &= \int_{a'} \star\omega^n = c_{n,\alpha} \int_{a'} \star\alpha + c_{n,\beta} \int_{a'} \star\beta + \int_{a'} \star\omega_{H^\perp}^n \\ \implies c_{n,\beta} \left(- \int_{a'} \star\beta \right) &= c_{n,\alpha} \int_{a'} \star\alpha + \left(\int_{a'} \star\omega_{H^\perp}^n - \varepsilon_{n,a'}^* \right) \\ \implies c_{n,\beta} &= c_{n,\alpha} \frac{\int_{a'} \star\alpha}{\|\beta\|_M^2} + \frac{\int_{a'} \star\omega_{H^\perp}^n - \varepsilon_{n,a'}^*}{\|\beta\|_M^2} \quad (\text{grâce à (2.43)}) \\ \implies \lim_{n \rightarrow \infty} c_{n,\beta} &= 2 \frac{\int_{a'} \star\alpha}{\|\beta\|_M^2} = 2\text{Re}(\tau_{\text{BS}}) \quad (\text{grâce à (2.50)})\end{aligned}$$

Calcul de $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(\tau_n)$.

$$\begin{aligned}
2\operatorname{Re}(\tau_n) + \varepsilon_{n,b'} &= \int_{b'} \omega^n = c_{n,\beta} + \int_{b'} \omega_{H^\perp}^n \\
\Rightarrow \operatorname{Re}(\tau_n) &= \frac{1}{2} c_{n,\beta} + \frac{1}{2} \int_{b'} \omega_{H^\perp}^n - \frac{1}{2} \varepsilon_{n,b'} \\
\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(\tau_n) &= \frac{\int_{a'} \star \alpha}{\|\beta\|_M^2} = \operatorname{Re}(\tau_{\text{BS}}) \quad (\text{grâce au calcul ci-dessus})
\end{aligned}$$

Calcul de $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(\tau_n)$.

$$\begin{aligned}
2\operatorname{Im}(\tau_n) + \varepsilon_{n,b'}^* &= \int_{b'} \star \omega^n = c_{n,\alpha} \int_{b'} \star \alpha + c_{n,\beta} \int_{b'} \star \beta + \int_{b'} \star \omega_{H^\perp}^n \\
\Rightarrow \operatorname{Im}(\tau_n) &= \frac{1}{2} c_{n,\alpha} \|\alpha\|_M^2 + \frac{1}{2} c_{n,\beta} \int_{b'} \star \beta + \frac{1}{2} \int_{b'} \star \omega_{H^\perp}^n - \frac{1}{2} \varepsilon_{n,b'}^* \quad (\text{grâce à (2.42)}) \\
\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(\tau_n) &= \|\alpha\|_M^2 + \frac{\int_{a'} \star \alpha \int_{b'} \star \beta}{\|\beta\|_M^2} = \frac{1}{\|\beta\|_M^2} = \operatorname{Im}(\tau_{\text{BS}}) \quad (\text{grâce à (2.45), (2.51)})
\end{aligned}$$

Par conséquent, la suite $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$ converge vers τ_{BS} et le théorème est démontré. \square

3.2.4 Convergence de la suite $\{h_n\}_{n \geq 1}$

Par hypothèse, la suite $\{(t_n, h_n)\}_{n \geq 1} \subset X = \mathbb{C} \times L_{\text{imp}}^2(\tilde{D})$ vérifie donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi(t_n, h_n)\|_Y^2 = 0.$$

Avant d'énoncer le résultat de convergence relatif à $\{h_n\}_{n \geq 1}$ et de développer les résultats intermédiaires menant à sa démonstration, qui se trouve en fin de paragraphe, il nous paraît utile de rappeler que

$$\begin{aligned}
\|\psi(t_n, h_n)\|_Y^2 &= \|h_n \circ g_1 - h_n\|_{\tilde{D}_1^{\min}}^2 + \|h_n \circ h_2 - h_n\|_{\tilde{D}_2^{\min}}^2 \\
&\quad + \|h_n \circ g_3 - h_n - 2t_n\|_{\tilde{D}_3^{\min}}^2 + \|h_n \circ h_4 - h_n\|_{\tilde{D}_4^{\min}}^2 \\
&\stackrel{(3.19)}{=} \|e_n^1\|_{\tilde{D}_1^{\min}}^2 + \|e_n^2\|_{\tilde{D}_2^{\min}}^2 + \|e_n^3\|_{\tilde{D}_3^{\min}}^2 + \|e_n^4\|_{\tilde{D}_4^{\min}}^2.
\end{aligned}$$

Théorème 3.38 *Pour tout entier $k \geq 0$, la suite $\{h_n^{(k)}\}_{n \geq 1} \subset L_{\text{imp}}^2(\tilde{D})$ converge uniformément localement dans \tilde{D} vers 0.*

Notons que la convergence uniforme locale dans $\tilde{D} = N_{\tilde{\delta}}(\mathcal{O})$ est équivalente aux convergences uniformes locales dans $N_{\delta}(\mathcal{O})$ pour tous les $\delta \in]0, \tilde{\delta}[$. Soient donc

$$\begin{aligned}\delta &\in]0, \tilde{\delta}[, \\ \tilde{D}_1 &= N_{\delta}([s_4, m_5]_h) \subset \subset \tilde{D}_1^{\min}, \\ \tilde{D}_2 &= N_{\delta}([s_1, m_2]_h) \subset \subset \tilde{D}_2^{\min}, \\ \tilde{D}_3 &= N_{\delta}([s_6, m_7]_h) \subset \subset \tilde{D}_3^{\min}, \\ \tilde{D}_4 &= N_{\delta}([s_3, m_4]_h) \subset \subset \tilde{D}_4^{\min}.\end{aligned}$$

Lemme 3.39 *Il existe une suite $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ de réels positifs avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ et vérifiant*

$$\begin{aligned}|h_n \circ g_1(z) - h_n(z)| &< \varepsilon_n && \text{sur } N_{\delta}([s_4, s_5]_h) = \tilde{D}_1 \cup h_5(\tilde{D}_1), \\ |h_n \circ h_2(z) - h_n(z)| &< \varepsilon_n && \text{sur } \tilde{D}_2, \\ |h_n \circ g_3(z) - h_n(z) - 2t_n| &< \varepsilon_n && \text{sur } N_{\delta}([s_6, s_7]_h) = \tilde{D}_3 \cup h_7(\tilde{D}_3), \\ |h_n \circ h_4(z) - h_n(z)| &< \varepsilon_n && \text{sur } \tilde{D}_4, \\ |h_n \circ h_6(z) - h_n(z)| &< \varepsilon_n && \text{sur } -\tilde{D}_2, \\ |h_n \circ h_8(z) - h_n(z)| &< \varepsilon_n && \text{sur } -\tilde{D}_4,\end{aligned}$$

pour tout $n \geq 1$.

Preuve. Application des hypothèses sur $\{(t_n, h_n)\}_{n \geq 1}$ et sur \tilde{D}_i , de la Remarque 3.9.b) et du Lemme fondamental. \square

Corollaire 3.40 *Pour tout $n \geq 1$, nous avons*

$$\begin{aligned}|h_n(s_1) - h_n(s_2)| &< \varepsilon_n, \\ |h_n(s_3) - h_n(s_4)| &< \varepsilon_n, \\ |h_n(s_1) - h_n(s_4)| &< \varepsilon_n, \\ |h_n(s_1) - t_n| &< 2\varepsilon_n.\end{aligned}$$

Pour chaque $i = 1, \dots, 8$, nous avons donc les équivalences

$$\{t_n\}_{n \geq 1} \text{ est convergente (resp. bornée)} \iff \{h_n(s_i)\}_{n \geq 1} \text{ est convergente (resp. bornée)}.$$

Preuve. Les trois premières inégalités découlent du Lemme 3.39 et, respectivement, de $s_1 = h_2(s_2)$, $s_1 = g_1(s_4)$, $s_3 = h_4(s_4)$. Pour la quatrième inégalité, nous avons

$$\begin{aligned} |2h_n(s_1) - 2t_n| &\leq |h_n(s_1) - h_n(s_4)| + |h_n(s_4) - h_n(s_3)| \\ &\quad + |h_n(s_3) - 2t_n + h_n(s_2)| + |-h_n(s_2) + h_n(s_1)| \\ &< \varepsilon_n + \varepsilon_n + |-h_n(s_7) - 2t_n + h_n(g_3(s_7))| + \varepsilon_n \\ &< 4\varepsilon_n. \end{aligned}$$

La deuxième inégalité découle du Lemme 3.39, de $s_3 = -s_7$, de l'imparité de h_n et de $s_2 = g_3(s_7)$. Et la dernière inégalité, à nouveau du Lemme 3.39. Les équivalences pour $i = 1, \dots, 4$, découlent immédiatement des inégalités et sont aussi valables pour $i = 4, \dots, 8$, car h_n est impaire. \square

Soit $\{a_n\}_{n \geq 1} \subset \partial N_\delta(\mathcal{O})$ et $\{M_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ deux suites vérifiant

$$M_n = \max_{z \in \overline{N_\delta(\mathcal{O})}} |h_n(z)| = \max_{z \in \partial N_\delta(\mathcal{O})} |h_n(z)| = |h_n(a_n)|.$$

L'existence de ces deux suites est assurée par le Principe du maximum pour les fonctions holomorphes et par le fait que h_n est défini sur $N_{\bar{\delta}}(\mathcal{O}) \supset \supset N_\delta(\mathcal{O})$.

Lemme 3.41 *Il existe une suite $\{a'_n\}_{n \geq 1} \subset \overline{\mathcal{O}}$ et un entier K indépendant de n tels que*

$$|h_n(a_n) - h_n(a'_n)| < K(\varepsilon_n + 2|t_n|)$$

pour tout $n \geq 1$.

Preuve. Soit $n \geq 1$. Puisque \mathcal{O} est un domaine fondamental pour l'action de G' sur \mathbb{D} , nous pouvons ramener $a_n \in \partial N_\delta(\mathcal{O})$ dans $\overline{\mathcal{O}}$ à l'aide d'éléments $T_1, T_2, \dots, T_k \in \{g_1^{\pm 1}, g_3^{\pm 1}, h_2, h_4, h_6, h_8\}$. Autrement dit, $T_k \cdots T_2 T_1(a_n) \in \overline{\mathcal{O}}$. De plus, ces éléments T_l peuvent être choisis de sorte que pour tout $l = 1, 2, \dots, k$:

$$T_l \cdots T_1(a_n) \in \overline{N_\delta(\mathcal{O})},$$

$$d_{hyp}(T_l T_{l-1} \cdots T_1(a_n), \mathcal{O}) < d_{hyp}(T_{l-1} \cdots T_1(a_n), \mathcal{O}) \quad (\text{pour } l > 1),$$

$$d_{hyp}(T_l \cdots T_1(a_n), G' s_i) = d_{hyp}(a_n, G' s_i) \quad (\text{car } G' s_1 = \dots = G' s_8),$$

où $G'z$ dénote la G' -orbite de $z \in \mathbb{D}$. Notons k_n le nombre *minimal* de ces éléments T_l et $a'_n \in \overline{\mathcal{O}}$ un point vérifiant $T_{k_n} \cdots T_2 T_1(a_n) = a'_n$ pour un certain choix d'éléments T_1, \dots, T_{k_n} . Nous avons alors

$$\begin{aligned} |h_n(a_n) - h_n(a'_n)| &\leq |h_n(a_n) - h_n(T_1(a_n))| + |h_n(T_1(a_n)) - h_n(T_2 T_1(a_n))| + \dots \\ &\quad + |h_n(T_{k_n-1} \cdots T_1(a_n)) - h_n(\underbrace{T_{k_n} T_{k_n-1} \cdots T_1(a_n)}_{= a'_n})| \end{aligned}$$

Chacun des k_n termes à droite de l'inégalité étant majoré par $\varepsilon_n + 2|t_n|$ (Lemme 3.39), il vient

$$|h_n(a_n) - h_n(a'_n)| < k_n(\varepsilon_n + 2|t_n|).$$

Puisque $\overline{N_\delta(\mathcal{O})}$ peut être recouvert par un nombre fini de domaines fermés $g(\overline{\mathcal{O}})$, avec $g \in G'$, la suite $\{k_n\}_{n \geq 1}$ est bornée. Nous posons alors $K = \sup_{n \geq 1} k_n$ et le lemme est démontré. \square

Remarque 3.42 Notons que la constante K du Lemme 3.41 dépend en fait du nombre de côtés du polygone fondamental pour l'action de G' sur \mathbb{D} , ici huit. (Cette remarque prendra tout son sens lorsque nous généraliserons la méthode d'uniformisation de Buser-Silhol aux surfaces de Riemann hyperelliptique de genre ≥ 3 dans un chapitre ultérieure.)

Proposition 3.43 *Pour tout $n \geq 1$, nous avons*

$$M_n < 3^L K(\varepsilon_n + 2|t_n|)$$

où $L = \left\lceil \frac{\text{Diam}_{\text{eucl}}(\mathcal{O})}{r} \right\rceil + 1$ et $r = d_{\text{eucl}}(\mathcal{O}, \partial N_\delta(\mathcal{O}))$.

Preuve. Soit $n \geq 1$. Puisque

$$|h_n(a_n) - h_n(a'_n)| < K(\varepsilon_n + 2|t_n|)$$

pour un certain entier K (Lemme 3.41), nous avons la majoration (Lemme 2.23)

$$M_n < 3^{l_n} K(\varepsilon_n + 2|t_n|)$$

avec $l_n = \left\lceil \frac{2\ell_{\text{eucl}}([a'_n, 0])}{r} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{2|a'_n|}{r} \right\rceil + 1$. Puisque $a'_n \in \overline{\mathcal{O}}$ et que $\overline{\mathcal{O}}$ est symétrique par rapport à 0, $2|a'_n|$ est majoré par le diamètre (euclidien) de l'octogone \mathcal{O} et la proposition s'ensuit. \square

Proposition 3.44 *Si la suite $\{h_n\}_{n \geq 1}$ est localement bornée dans $N_\delta(\mathcal{O})$, alors $\{t_n\}_{n \geq 1}$ converge vers 0 et $\{h_n\}_{n \geq 1}$ converge uniformément localement dans $N_\delta(\mathcal{O})$ vers 0.*

Preuve. Par le Théorème de Montel (Théorème 2.14), il existe une sous-suite $\{h_{n_j}\}_{j \geq 1}$ convergeant, uniformément localement dans $N_\delta(\mathcal{O})$, vers une fonction holomorphe impaire $h : N_\delta(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{C}$. Or, pour tout $n \geq 1$, nous avons (Lemme 3.39)

$$|h_{n_j}(g_3(m_5)) - h_{n_j}(m_5) - 2t_{n_j}| < \varepsilon_{n_j}.$$

Puisque $g_3(m_5) = m_1 = -m_5$, il vient ainsi

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |-h_{n_j}(m_5) - t_{n_j}| = 0$$

et par suite

$$\lim_{j \rightarrow \infty} t_{n_j} = -h(m_5) =: t.$$

La fonction holomorphe impaire $f_{\text{BS}} + h : N_\delta(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifie donc

$$\begin{aligned} (f_{\text{BS}} + h) \circ g_1 &= f_{\text{BS}} + h + 2 \quad \text{sur } [s_4, s_5]_h, \\ (f_{\text{BS}} + h) \circ h_2 &= f_{\text{BS}} + h \quad \text{sur } [s_1, s_2]_h, \\ (f_{\text{BS}} + h) \circ g_3 &= f_{\text{BS}} + h + 2(\tau_{\text{BS}} + t) \quad \text{sur } [s_5, s_6]_h, \\ (f_{\text{BS}} + h) \circ h_4 &= f_{\text{BS}} + h \quad \text{sur } [s_3, s_4]_h. \end{aligned}$$

Par conséquent (Théorème 1.20, page 17), $f_{\text{BS}} + h = f_{\text{BS}}$ sur $N_\delta(\mathcal{O})$ et donc $h = 0$ et $t = 0$. Ainsi, toute sous-suite $\{h_{n_j}\}_{j \geq 1}$ convergeant uniformément localement dans $N_\delta(\mathcal{O})$ converge vers 0. Par le Critère de convergence de Montel (Théorème 2.15), il vient alors que $\{h_n\}_{n \geq 1}$ converge uniformément localement dans $N_\delta(\mathcal{O})$ vers 0 et par suite, $\{t_n\}_{n \geq 1}$ converge vers 0. D'où la proposition. \square

Nous terminons ce paragraphe par la preuve relative à la convergence de la suite $\{h_n\}_{n \geq 1}$ et complétons ainsi la preuve du théorème principal (Théorème 3.17).

Démonstration du Théorème 3.38. Puisque la suite $\{t_n\}_{n \geq 1}$ est convergente (Théorème 3.37), et donc en particulier bornée, la suite $\{h_n\}_{n \geq 1}$ est aussi bornée (Proposition 3.43). Le théorème découle finalement de la Proposition 3.44. \square

3.3 Approximation par minimisation de norme sur des arcs

Dans cette section, nous nous intéressons au problème de minimisation lorsque celle-ci se fait via une norme définie sur certains demi-côtés de l'octogone \mathcal{O} .

Soient

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= [s_4, m_5]_h \subset \tilde{D}_1^{\min} = N_{\tilde{\delta}}([s_4, m_5]_h), \\ \gamma_2 &= [s_1, m_2]_h \subset \tilde{D}_2^{\min} = N_{\tilde{\delta}}([s_1, m_2]_h), \\ \gamma_3 &= [s_6, m_7]_h \subset \tilde{D}_3^{\min} = N_{\tilde{\delta}}([s_6, m_7]_h), \\ \gamma_4 &= [s_3, m_4]_h \subset \tilde{D}_4^{\min} = N_{\tilde{\delta}}([s_3, m_4]_h), \end{aligned}$$

les quatre demi-côtés de l'octogone \mathcal{O} sur lesquels sont sélectionnés les points du problème de minimisation de la méthode d'approximation de Buser-Silhol (cf. Figure 1.5, page 22). Soient encore $\Gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_4$ et, pour chaque $i = 1, \dots, 4$, une fonction continue non négative $\rho_i : \gamma_i \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant $0 < \int_{\gamma_i} \rho_i(z) |dz| < \infty$. Nous appellerons *fonction poids sur Γ* la fonction $\rho : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $\rho|_{\gamma_i} = \rho_i$. La justification de l'introduction d'une telle fonction apparaîtra à la prochaine section dans laquelle nous étudierons le problème de

minimisation lorsque celle-ci se fait via la minimisation d'une *semi-norme* sur Γ . Pour chaque $i = 1, \dots, 4$, nous définissons un nouveau produit scalaire sur $L^2(\tilde{D}_i^{\min})$ (et donc aussi sur $L_{\text{imp}}^2(\tilde{D}_i^{\min})$) comme suit

$$\langle f, \tilde{f} \rangle_{\gamma_i} = \langle f, \tilde{f} \rangle_{\gamma_i, \rho_i} = \int_{\gamma_i} f(z) \overline{\tilde{f}(z)} \rho_i(z) |dz|, \quad f, \tilde{f} \in L^2(D_1).$$

Sur Y , nous définissons alors le produit scalaire suivant

$$\left\langle (f_1, f_2, f_3, f_4), (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3, \tilde{f}_4) \right\rangle_{\Gamma} = \sum_{i=1}^4 \langle f_i, \tilde{f}_i \rangle_{\gamma_i}, \quad (f_1, f_2, f_3, f_4), (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3, \tilde{f}_4) \in Y.$$

Muni de ce produit scalaire, Y est un espace préhilbertien qui n'est pas complet. On note $\|\cdot\|_{\Gamma}$ la norme induite.

Nous allons maintenant comparer les deux normes sur Y que sont $\|\cdot\|_Y$ et $\|\cdot\|_{\Gamma}$.

Lemme 3.45 *Pour tout $y \in Y$, nous avons l'inégalité*

$$\|y\|_{\Gamma} \leq \sqrt{c_{\Gamma}} \|y\|_Y,$$

où $c_{\Gamma} = c_{\Gamma, \rho} = \max_{i=1, \dots, 4} \frac{\rho_{\gamma_i}}{\pi d_{\gamma_i}^2}$ avec $\rho_{\gamma_i} = \int_{\gamma_i} \rho_i(z) |dz| > 0$ et $d_{\gamma_i} > 0$ la distance euclidienne entre γ_i et $\partial \tilde{D}_i^{\min}$.

Preuve. Soit $(f_1, f_2, f_3, f_4) \in Y$. Pour chaque $i = 1, \dots, 4$, nous avons les inégalités

$$\|f_i\|_{\gamma_i}^2 = \int_{\gamma_i} |f_i(z)|^2 \rho_i(z) |dz| \leq \max_{z \in \gamma_i} |f_i(z)|^2 \int_{\gamma_i} \rho_i(z) |dz| \leq \frac{\rho_{\gamma_i}}{\pi d_{\gamma_i}^2} \|f_i\|_{\tilde{D}_i^{\min}}^2,$$

où la dernière inégalité découle du Lemme fondamental. Nous obtenons ainsi,

$$\|(f_1, f_2, f_3, f_4)\|_{\Gamma}^2 = \sum_{i=1}^4 \|f_i\|_{\gamma_i}^2 \leq \sum_{i=1}^4 \frac{\rho_{\gamma_i}}{\pi d_{\gamma_i}^2} \|f_i\|_{D_1}^2 \leq c_{\Gamma} \|(f_1, f_2, f_3, f_4)\|_Y^2.$$

D'où le lemme. \square

À présent, considérons la fonctionnelle $\varphi_{\Gamma} : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$, dépendante de la fonction poids ρ , définie par

$$\varphi_{\Gamma}(\tau, f) = \|(2, 0, 0, 0) - \psi(\tau, f)\|_{\Gamma}^2,$$

avec $(\tau, f) \in X$. Tout comme φ_Y , la fonctionnelle φ_{Γ} caractérise l'élément $(\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$ puisque ψ le caractérise et que $\|\cdot\|_{\Gamma}$ est une norme sur Y . Pour $(\tau, f) \in Y$, nous avons alors l'équivalence

$$\varphi_{\Gamma}(\tau, f) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\tau, f) = (\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}}).$$

Remarque 3.46 De manière analogue à la Remarque 3.9.c), si nous prenons les approximations de f_{BS} dans $L_0^2(\tilde{D})$ au lieu de $L_{\text{imp}}^2(\tilde{D})$, nous devrions modifier, en conséquence, la définition de l'opérateur ψ , de la réunion de courbes Γ et de la norme $\|\cdot\|_{\Gamma}$.

Tout comme à la section précédente, notre intention est de démontrer l'existence, pour chaque $n \geq 1$, d'un élément $(\tau_n^\Gamma, p_n^\Gamma) \in \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$ minimisant φ_Γ sur $\mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$ et de démontrer que la suite $\{(\tau_n^\Gamma, p_n^\Gamma)\}_{n \geq 1}$ converge vers $(\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$. Nous présentons une démonstration de la première partie (Proposition 3.51). Pour la deuxième partie, nous ne sommes toutefois qu'en mesure d'énoncer une conjecture (Conjecture 3.52), qui sera commentée dans le dernier chapitre (Section 6.1). Au préalable, nous donnons quelques corollaires utiles du Lemme 3.45.

Corollaire 3.47 *Pour tout $(\tau, f) \in X$, nous avons l'inégalité*

$$\varphi_\Gamma(\tau, f) \leq c_\Gamma \varphi_Y(\tau, f). \quad (3.48)$$

Preuve. Soit $(\tau, f) \in X$. Le Lemme 3.45 nous donne alors

$$\varphi_\Gamma(\tau, f) = \|(2, 0, 0, 0) - \psi(\tau, f)\|_\Gamma^2 \leq c_\Gamma \|(2, 0, 0, 0) - \psi(\tau, f)\|_Y^2 = c_\Gamma \varphi_Y(\tau, f),$$

et le corollaire est démontré. \square

Corollaire 3.49 *La quantité*

$$\|\psi\|_{X, \Gamma} = \sup \left\{ \|\psi(\tau, f)\|_\Gamma \mid (\tau, f) \in X \text{ et } \|(\tau, f)\|_X \leq 1 \right\}$$

est finie. Nous avons en particulier

$$\|\psi\|_{X, \Gamma} \leq \sqrt{c_\Gamma} \|\psi\|_{X, Y}.$$

Preuve. Ce résultat découle immédiatement du Lemme 3.45. \square

Corollaire 3.50 *La norme $\|\cdot\|_\Gamma : Y \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $(Y, \|\cdot\|_Y)$ et la fonctionnelle $\varphi_\Gamma : X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $(X, \|\cdot\|_X)$.*

Preuve. Soit $\{y_i\}_{i \geq 1} \subset Y$ une suite convergeant dans $(Y, \|\cdot\|_Y)$ vers un élément y . L'inégalité triangulaire de la norme $\|\cdot\|_\Gamma$ et le Lemme 3.45 nous donnent

$$| \|y_i\|_\Gamma - \|y\|_\Gamma | \leq \|y_i - y\|_\Gamma \leq \sqrt{c_\Gamma} \|y_i - y\|_Y.$$

Par conséquent, $\|\cdot\|_\Gamma$ est continue. La continuité de ψ (Lemme 3.10) implique alors celle de φ_Γ et le lemme s'ensuit. \square

Proposition 3.51 *Il existe une unique suite $\{(\tau_n^\Gamma, p_n^\Gamma)\}_{n \geq 1} \subset X$ telle que, pour chaque $n \geq 1$,*

$$(\tau_n^\Gamma, p_n^\Gamma) \in \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1} \quad \text{et} \quad \varphi_\Gamma(\tau_n^\Gamma, p_n^\Gamma) = \min \{ \varphi_\Gamma(\tau, p) \mid (\tau, p) \in \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1} \}.$$

De plus, cette suite vérifie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_\Gamma(\tau_n^\Gamma, p_n^\Gamma) = 0.$$

Preuve. Puisque la norme $\|\cdot\|_\Gamma : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ est issue d'un produit scalaire, elle est strictement convexe (Remarque 2.3). De plus, elle est continue (Corollaire 3.50). La proposition découle alors de la Proposition 3.15. \square

Conjecture 3.52 *La suite $\{\tau_n^\Gamma\}_{n \geq 1}$ converge vers τ_{BS} et, pour tout entier $k \geq 0$, la suite $\{p_n^{\Gamma(k)}\}_{n \geq 1}$ converge vers $f_{\text{BS}}^{(k)}$ uniformément localement dans \mathcal{O} .*

Remarque 3.53 Nous ne sommes pas certains qu'une convergence uniforme dans $\overline{\mathcal{O}}$ de $\{p_n^{\Gamma(k)}\}_{n \geq 1}$ vers $f_{\text{BS}}^{(k)}$ soit possible. Toutefois, au vu de nos expérimentations numériques, la convergence sur $\partial\mathcal{O}$ semble être relativement bonne, car lorsque l'octogone admissible n'est pas mal conditionné numériquement nous obtenons des approximations numériques de très bonne qualité des coefficients $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$, dont les préimages dans $\overline{\mathcal{O}}$ sur trouvent sur $\partial\mathcal{O}$.

3.4 Approximation par minimisation de semi-norme sur des arcs

Nous nous intéressons, à présent, au problème de minimisation lorsque celle-ci se fait via une semi-norme sur la réunion Γ de demi-côtés de l'octogone \mathcal{O} . Nous rappelons que

$$\Gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_4 = [s_4, m_5]_h \cup [s_1, m_2]_h \cup [s_6, m_7]_h \cup [s_3, m_4]_h.$$

Nous appelons *subdivision de Γ à $4M$ points* un ensemble $\sigma = \{\{z_{j,k}\}_{k=1}^M\}_{j=1}^4$ avec $\{z_{j,k}\}_{k=1}^M \subset \gamma_j$ pour chaque $j = 1, \dots, 4$. Il n'est pas nécessaire d'avoir le même nombre de points sur chaque arc γ_j , mais nous faisons tout de même cette hypothèse afin de ne pas allourdir plus la notation. Pour une subdivision σ de Γ à $4M$ points, nous définissons la fonctionnelle $\|\cdot\|_\sigma : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+$ par

$$\|(f_1, f_2, f_3, f_4)\|_\sigma = \sqrt{\sum_{k=1}^M \left(|f_1(z_{1,k})|^2 + |f_2(z_{2,k})|^2 + |f_3(z_{3,k})|^2 + |f_4(z_{4,k})|^2 \right)},$$

avec $(f_1, f_2, f_3, f_4) \in Y$. Nous définissons ensuite la fonctionnelle $\varphi_\sigma : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ par

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma(\tau, f) &= \|\psi(\tau, f) - (2, 0, 0, 0)\|_\sigma^2 \\ &= \sum_{k=1}^M \left\{ |f(g_1(z_{1,k})) - f(z_{1,k}) - 2|^2 + |f(h_2(z_{2,k})) - f(z_{2,k})|^2 \right. \\ &\quad \left. + |f(g_3(z_{3,k})) - f(z_{3,k}) - 2\tau|^2 + |f(h_4(z_{4,k})) - f(z_{4,k})|^2 \right\} \end{aligned}$$

avec $(\tau, f) \in X$, et où nous rappelons que $\psi(\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}}) = (2, 0, 0, 0)$. Finalement, nous définissons la fonctionnelle $RN_\sigma : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$, appelée *résidu normalisé* (relatif à l'élément $(\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$ et la subdivision σ de Γ à $4M$ points), par

$$RN_\sigma(\tau, f) = \sqrt{\frac{1}{M}} \varphi_\sigma(\tau, f)$$

avec $(\tau, f) \in X$.

Remarque 3.54 Soit σ une subdivision de Γ à $4M$ points.

- a) La fonctionnelle $\|\cdot\|_\sigma$ est une semi-norme (renuméroter la somme et utiliser l'Inégalité de Minkowski). De plus, elle est continue. En effet, la convergence dans Y au sens de la norme $\|\cdot\|_Y$ implique la convergence uniforme locale dans \tilde{D}_i^{\min} de chacune des composantes. Cette dernière implique, en particulier, la convergence ponctuelle sur \tilde{D}_i^{\min} de chacune des composantes. La continuité de φ_σ découle alors de celle de l'opérateur ψ (Lemme 3.10).
- b) Il est important de noter la différence cruciale entre les deux fonctionnelles $\varphi_Y, \varphi_\Gamma$ et la fonctionnelle φ_σ . Alors que les premières caractérisent l'élément (τ_{BS}, f_{BS}) , cette dernière n'a pas cette propriété, du moins pas dans $X = \mathbb{C} \times L_{\text{imp}}^2(\tilde{D})$. Cela vient du fait que la fonctionnelle $\|\cdot\|_\sigma$ n'est pas une norme sur Y , mais seulement une semi-norme. Si $(\tau, f) \in X$ vérifie $\varphi_\sigma(\tau, f) = 0$, nous ne pouvons pas conclure que $(\tau, f) = (\tau_{BS}, f_{BS})$. En effet, il est aisé de construire un polynôme p de degré suffisamment élevé (le degré $8M$ suffit) tel que $\varphi_\sigma(0, p) = 0$.

Dans la méthode d'approximation de Buser-Silhol, une famille $\sigma = \{\sigma^i\}_{i=1}^\infty$ de subdivisions $\sigma^i = \{\{z_{j,k}^i\}_{k=1}^{M_i}\}_{j=1}^4$ de Γ à $4M_i$ points, avec $M_i = i$, est donnée. La résolution numérique du problème de minimisation, pour des entiers $n \geq 1$ et $i \geq 1$, avec $M_i = i$ suffisamment grand relativement à n , produit un élément $(\tau_n^i, p_n^i) \in \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$ qui minimise numériquement, donc approximativement, la fonctionnelle RN_{σ^i} sur $\mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$. Dans des cas où le polynôme de la courbe algébrique conformément équivalente à \mathbb{D}/G est connu, nous observons qu'en augmentant le nombre n de fonctions de base (i.e. le degré du polynôme d'approximation p_n^M) et le nombre de points $M_i = i$, l'élément (τ_n^M, p_n^M) obtenu s'approche de plus en plus de l'élément recherché (τ_{BS}, f_{BS}) .

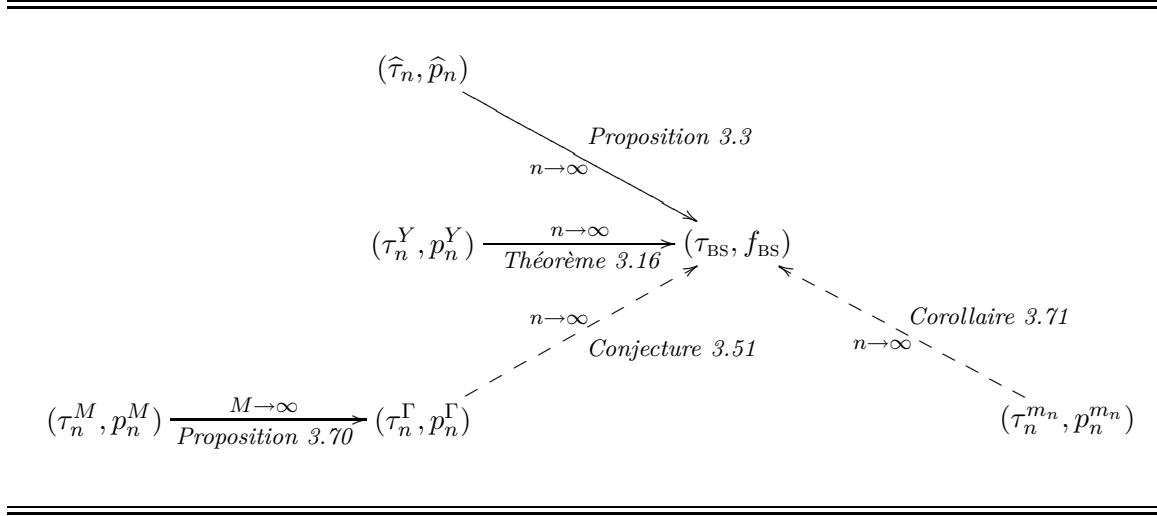
Il semble clair, du moins a priori, que le succès de la méthode d'approximation de Buser-Silhol et son efficacité dépendent du choix de la famille $\sigma = \{\sigma^i\}_{i=1}^\infty$ de subdivisions de Γ . Notre intention est de démontrer que pour un type de famille de subdivisions, type auquel appartient la famille de subdivisions utilisée par P. Buser et R. Silhol, les approximations issues de la méthode d'approximation de Buser-Silhol convergent vers l'élément (τ_{BS}, f_{BS}) . Étant donné une telle famille de subdivisions $\sigma = \{\sigma^i\}_{i=1}^\infty$, notre stratégie est de démontrer que pour chaque entier $n \geq 1$, il existe un indice i_n telle que pour tout $i \geq i_n$ l'existence d'un élément $(\tau_n^i, p_n^i) \in \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$ minimisant RN_{σ^i} sur $\mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$ est garantie (Proposition 3.59). Ensuite, nous montrons que pour chaque $n \geq 1$ la suite $\{(\tau_n^i, p_n^i)\}_{i \geq i_n}$ converge vers $(\tau_n^\Gamma, p_n^\Gamma)$, l'unique élément minimisant φ_Γ sur $\mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$ (Lemme 3.69). Si la Conjecture 3.52 est vraie, cela nous permettrait alors de conclure que pour toute suite de couple d'indices $\{(n_j, m_j)\}_{j \geq 1}$ vérifiant la condition $m_j \geq i_{n_j}$ pour tout $j \geq 1$, la suite d'approximations $\{(\tau_{n_j}^{m_j}, p_{n_j}^{m_j})\}_{j \geq 1}$ converge vers l'élément recherché (τ_{BS}, f_{BS}) (Corollaire 3.72).

Notre stratégie est résumée dans la Table 3.8 dans laquelle les flèches traitillées reposent sur des conjectures non encore démontrées, mais essentiellement sur la Conjecture 3.52.

Nous nous intéressons à présent à un type de subdivision de Γ très convenable pour notre étude et basé sur une subdivision euclidienne régulière de l'intervalle $[0, 1]$. Pour chaque entier $M \geq 1$, notons $\{t_k^M\}_{k=0}^M$ la partition régulière euclidienne de l'intervalle $[0, 1]$, i.e.

$$t_k^M = \frac{k}{M}.$$

TABLE 3.8. *Schéma des résultats et conjectures de convergence devant mener à la démonstration de la convergence de la méthode d'approximation de Buser-Silhol.*



Pour chaque $j = 1, \dots, 4$, soit $\gamma_j : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{D}$ une paramétrisation régulière de l'arc γ_j , i.e. γ_j est différentiable et $|\dot{\gamma}_j(t)| > 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. Pour chaque $M \geq 1$, nous obtenons une subdivision $\sigma^M = \{ \{z_{j,k}^M\}_{k=1}^M \}_{j=1}^4$ de Γ en posant

$$z_{j,k}^M = \gamma_j(t_k^M), \quad k = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, 4.$$

Une telle subdivision est appelée *subdivision conforme de Γ à $4M$ points* associée aux paramétrisations $\gamma_1, \dots, \gamma_4$. Nous obtenons ainsi une *famille de subdivisions conformes* $\sigma = \{\sigma^M\}_{M \geq 1}$.

Exemple 3.55

a) La famille de subdivisions conformes utilisée par P. Buser et R. Silhol est définie par

$$z_{1,k}^M = \gamma_1^{\text{BS}}\left(\frac{k}{M}\right) = g_{m_5}^{-1}\left(\frac{k}{M} g_{m_5}(s_4)\right), \quad k = 1, \dots, M,$$

où $g_{m_5} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ est défini par

$$g_{m_5}(z) = \frac{z - m_5}{-\overline{m_5}z + 1}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Les subdivisions pour les arcs $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ sont définies de manière similaire.

b) La famille de subdivisions conformes euclidienne est donnée par

$$z_{j,k}^M = \gamma_j^{\text{eucl}}\left(\frac{k}{M}\right), \quad k = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, 4,$$

où $\gamma_j^{\text{eucl}} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{D}$ est une paramétrisation de γ_j à vitesse euclidienne constante.

Soient $\gamma_1, \dots, \gamma_4 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{D}$ des paramétrisations régulières de $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ respectivement (nous faisons donc l'abus de notation habituel entre une courbe et sa trace) et $\sigma = \{\sigma^M\}_{M \geq 1}$ la famille de subdivisions conformes associée. L'introduction de la fonction poids $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dans la définition de $\|\cdot\|_\Gamma$ (page 90) est justifiée par le lemme suivant.

Lemme 3.56 *La fonction poids $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par*

$$\rho_i(\gamma_i(t)) = \frac{1}{|\dot{\gamma}_i(t)|}, \quad t \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, 4,$$

vérifie, pour tout $(\tau, f) \in X$,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} RN_{\sigma^M}^2(\tau, f) = \varphi_\Gamma(\tau, f).$$

Preuve. Pour $(\tau, f) \in X$, nous avons

$$\begin{aligned} \varphi_\Gamma(\tau, f) &= \|(2, 0, 0, 0) - \psi(\tau, f)\|_\Gamma^2 \\ &= \int_{\gamma_1} |f(g_1(z)) - f(z) - 2|^2 \rho_1(z) |dz| + \int_{\gamma_2} |f(h_2(z)) - f(z)|^2 \rho_2(z) |dz| \\ &\quad + \int_{\gamma_3} |f(g_3(z)) - f(z) - 2\tau|^2 \rho_3(z) |dz| + \int_{\gamma_4} |f(h_4(z)) - f(z)|^2 \rho_4(z) |dz| \\ &= \int_0^1 \left\{ |f(g_1(\gamma_1(t))) - f(\gamma_1(t)) - 2|^2 \rho_1(\gamma_1(t)) |\dot{\gamma}_1(t)| \right. \\ &\quad + |f(h_2(\gamma_2(t))) - f(\gamma_2(t))|^2 \rho_2(\gamma_2(t)) |\dot{\gamma}_2(t)| \\ &\quad + |f(g_3(\gamma_3(t))) - f(\gamma_3(t)) - 2\tau|^2 \rho_3(\gamma_3(t)) |\dot{\gamma}_3(t)| \\ &\quad \left. + |f(h_4(\gamma_4(t))) - f(\gamma_4(t))|^2 \rho_4(\gamma_4(t)) |\dot{\gamma}_4(t)| \right\} dt. \end{aligned}$$

En prenant comme fonction poids la fonction $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\rho_i(\gamma_i(t)) = \frac{1}{|\dot{\gamma}_i(t)|}, \quad t \in [0, 1],$$

il vient

$$\begin{aligned} \varphi_\Gamma(\tau, f) &= \int_0^1 \left\{ |f(g_1(\gamma_1(t))) - f(\gamma_1(t)) - 2|^2 + |f(h_2(\gamma_2(t))) - f(\gamma_2(t))|^2 \right. \\ &\quad \left. + |f(g_3(\gamma_3(t))) - f(\gamma_3(t)) - 2\tau|^2 + |f(h_4(\gamma_4(t))) - f(\gamma_4(t))|^2 \right\} dt. \end{aligned}$$

Puisque pour tout $M \geq 1$, nous avons la somme de Riemann

$$\begin{aligned}
RN_{\sigma^M}^2(\tau, f) &= \frac{1}{M} \varphi_{\sigma^M}(\tau, f) \\
&= \sum_{k=1}^M \left\{ |f(g_1(z_{1,k}^M)) - f(z_{1,k}^M) - 2|^2 + |f(h_2(z_{2,k}^M)) - f(z_{2,k}^M)|^2 \right. \\
&\quad \left. + |f(g_3(z_{3,k}^M)) - f(z_{3,k}^M) - 2\tau|^2 + |f(h_4(z_{4,k}^M)) - f(z_{4,k}^M)|^2 \right\} \cdot \frac{1}{M} \\
&= \sum_{k=1}^M \left\{ |f(g_1(\gamma_1(t_k^M))) - f(\gamma_1(t_k^M)) - 2|^2 + |f(h_2(\gamma_2(t_k^M))) - f(\gamma_2(t_k^M))|^2 \right. \\
&\quad \left. + |f(g_3(\gamma_3(t_k^M))) - f(\gamma_3(t_k^M)) - 2\tau|^2 \right. \\
&\quad \left. + |f(h_4(\gamma_4(t_{4,k}^M))) - f(\gamma_4(t_{4,k}^M))|^2 \right\} \cdot |t_{k-1}^M - t_k^M|,
\end{aligned}$$

nous obtenons finalement

$$\lim_{M \rightarrow \infty} RN_{\sigma^M}^2(\tau, f) = \varphi_{\Gamma}(\tau, f).$$

D'où le lemme. \square

Exemple 3.57 Nous reprenons les notations de l'Exemple 3.55.

- 1) Les fonctions poids $\rho_j^{\text{BS}} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ associées à la famille de subdivisions conformes utilisés par P. Buser et R. Silhol sont définies par

$$\rho_j^{\text{BS}}(t) = \frac{1}{|\dot{\gamma}_j^{\text{BS}}(t)|}, \quad t \in [0, 1].$$

Pour ρ_1^{BS} , il vient

$$\rho_j^{\text{BS}}(t) = \frac{1}{|(g_{m_5}^{-1})'(tg_{m_5}(s_4))g_{m_5}(s_4)|}, \quad t \in [0, 1].$$

Nous avons des expressions similaires pour les fonctions $\rho_2^{\text{BS}}, \rho_3^{\text{BS}}, \rho_4^{\text{BS}}$.

- 2) Les fonctions poids $\rho_j^{\text{eucl}} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ associées à la famille de subdivisions euclidiennes sont définies par

$$\rho_j^{\text{eucl}}(t) = \frac{1}{|\dot{\gamma}_j^{\text{eucl}}(t)|} = \frac{1}{\text{Long}(\gamma_j)}, \quad t \in [0, 1].$$

Notons que les fonctions ρ_j^{eucl} sont constantes.

Remarque 3.58

- a) Le Lemme 3.56 montre que la suite $\{RN_{\sigma^M}^2\}_{M \geq 1}$ de fonctionnelles sur X converge ponctuellement vers la fonctionnelle $\varphi_{\Gamma} : X \rightarrow \mathbb{R}_+$. Ainsi, pour $(\tau, f) \in X$ et M donnés, la quantité $RN_{\sigma^M}^2(\tau, f)$ est une approximation de $\varphi_{\Gamma}(\tau, f)$. Toutefois, nous n'avons aucune information quant à la qualité de cette approximation.

b) Soient $n \geq 1$ et $\{p^k\}_{k \geq 1} \subset \mathcal{P}^n$ une suite de polynômes. Pour chaque $k \geq 1$, notons $p^k(z) = \sum_{i=0}^n a_i^k z^i$. Alors la suite $\{p^k\}_{k \geq 1}$ est bornée au sens de la norme $\|\cdot\|_{\tilde{D}}$ si et seulement, pour chaque $i = 0, \dots, n$, la suite $\{a_i^k\}_{k \geq 1}$ est bornée. Cela découle du fait que toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes (et que \tilde{D} est un domaine borné). Dire que $\{p^k\}_{k \geq 1}$ est bornée est donc sans équivoque.

À présent, soit $\sigma = \{\sigma^M\}_{M \geq 1}$ une famille de subdivisions conformes de Γ .

Proposition 3.59 *Pour chaque entier $n \geq 1$, il existe un entier M_n , dépendant de n , et une suite $\{(\tau_n^M, p_n^M)\}_{M \geq M_n} \subset \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$ tels que, pour tout entier $M \geq M_n$, l'élément (τ_n^M, p_n^M) vérifie*

$$RN_{\sigma^M}^2(\tau_n^M, p_n^M) = \min \left\{ RN_{\sigma^M}^2(\tau, p) \mid (\tau, p) \in \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1} \right\}.$$

Preuve. Notons tout d'abord que nous ne pouvons pas directement appliquer la Proposition 3.15 car la fonctionnelle $\|\cdot\|_{\sigma^M} : Y \rightarrow \mathbb{R}_+$, et par suite la fonctionnelle $M \cdot RN_{\sigma^M}^2 : X \rightarrow \mathbb{R}_+$, n'est qu'une semi-norme sur Y et non pas une norme. Fixons un entier $n \geq 1$. Pour chaque entier $M \geq 1$, soit $\{(\tau_{n,i}^M, p_{n,i}^M)\}_{i \geq 1} \subset \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$ une suite telle que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} RN_{\sigma^M}^2(\tau_{n,i}^M, p_{n,i}^M) = \inf \left\{ RN_{\sigma^M}^2(\tau, p) \mid (\tau, p) \in \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1} \right\}. \quad (3.60)$$

Par définition de cette suite, il existe une constante $C_{n,M}$ telle que

$$M \cdot RN_{\sigma^M}^2(\tau_{n,i}^M, p_{n,i}^M) \leq C_{n,M} \quad \text{pour tout } i \geq 1. \quad (3.61)$$

Pour démontrer la proposition, il suffit de démontrer qu'il existe au plus un nombre fini d'entiers $M \geq 1$ tel que les suites $\{p_{n,i}^M\}_{i \geq 1}$ ne sont pas bornées. En effet, pour $M \geq 1$ donné, si la suite $\{p_{n,i}^M\}_{i \geq 1}$ est bornée, alors l'Inégalité (3.61) implique que la suite $\{\tau_{n,i}^M\}_{i \geq 1}$ l'est aussi. Par conséquent, la suite $\{(\tau_{n,i}^M, p_{n,i}^M)\}_{i \geq 1}$ est bornée et possède donc, par le Lemme 3.1, une sous-suite convergeant vers un élément $(\tau_n^M, p_n^M) \in \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$ qui minimise alors φ_{σ^M} sur $\mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$.

Étape 1 : pour chaque $M \geq 1$, construction d'une suite auxiliaire bornée $\{(\tilde{\tau}_{n,i}^M, \tilde{p}_{n,i}^M)\}_{i \geq 1}$. Supposons que la suite $\{p_{n,i}^M\}_{i \geq 1}$ ne soit pas bornée. En notant

$$p_{n,i}^M(z) = \sum_{k=1}^n a_{n,i,k}^M z^{2k-1}, \quad z \in \mathbb{D},$$

pour chaque $i \geq 1$, cela signifie que les suites $\{a_{n,i,k}^M\}_{i \geq 1}$, $k = 1, \dots, n$, ne sont pas toutes bornées. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que la suite $\{\alpha_{n,i}^M\}_{i \geq 1} \subset \mathbb{R}$, définie par $\alpha_{n,i}^M = \max\{|a_{n,i,1}^M|, \dots, |a_{n,i,n}^M|\}$, est strictement positive. De plus, nous avons

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_{n,i}^M = \infty.$$

Nous posons alors

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{n,i}^M &= \frac{1}{\alpha_{n,i}^M} \tau_{n,i}^M, \\ \tilde{p}_{n,i}^M(z) &= \frac{1}{\alpha_{n,i}^M} p_{n,i}^M(z) = \sum_{k=1}^n \frac{a_{n,i,k}^M}{\alpha_{n,i}^M} z^{2k-1}, \quad z \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

La suite $\{\tilde{p}_{n,i}^M\}_{i \geq 1}$ ainsi définie est donc bornée. Plus précisément, chaque polynôme $\tilde{p}_{n,i}^M$ possède (au moins) un coefficient de module complexe égal à 1, les autres coefficients étant de module plus petit ou égal à 1. Par l'Inégalité (3.61), la suite $\{\tilde{\tau}_{n,i}^M\}_{i \geq 1}$ est aussi bornée.

Étape 2 : une égalité pour la suite auxiliaire bornée $\{(\tilde{\tau}_{n,i}^M, \tilde{p}_{n,i}^M)\}_{i \geq 1}$. Étant bornée, cette suite possède une sous-suite qui converge vers un élément $(\tilde{\tau}_n^M, \tilde{p}_n^M) \in \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$ (Lemme 3.1). Puisque l'Inégalité (3.61) implique, pour tout $i \geq 1$ et tout $k = 1, \dots, M$, la majoration

$$|p_{n,i}^M(g_1(z_{1,k}^M)) - p_{n,i}^M(z_{1,k}^M)| \leq 2 + C_{n,M},$$

il vient

$$|\tilde{p}_{n,i}^M(g_1(z_{1,k}^M)) - \tilde{p}_{n,i}^M(z_{1,k}^M)| \leq \frac{2 + C_{n,M}}{\alpha_{n,i}^M}.$$

En passant à la limite $i \rightarrow \infty$, nous obtenons

$$|\tilde{p}_n^M(g_1(z_{1,k}^M)) - \tilde{p}_n^M(z_{1,k}^M)| = 0 \quad (3.62)$$

pour tout $k = 1, \dots, M$, car $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_{n,i}^M = \infty$.

Étape 3 : démonstration par l'absurde de la proposition. Supposons qu'il existe une suite, strictement croissante, d'entiers $\{m_j\}_{j \geq 1} \subset \mathbb{N}$, telle que, pour chaque m_j , il existe une suite *non bornée* $\{(\tau_{n,i}^{m_j}, p_{n,i}^{m_j})\}_{i \geq 1} \subset \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$ vérifiant l'Égalité (3.60). Pour chaque $j \geq 1$, la construction ci-dessus (Étape 2) nous donne un élément $(\tilde{\tau}_n^{m_j}, \tilde{p}_n^{m_j}) \in \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$. La suite $\{(\tilde{\tau}_n^{m_j}, \tilde{p}_n^{m_j})\}_{j \geq 1}$ ainsi définie est, par construction, bornée. Elle possède donc une sous-suite, que nous notons aussi $\{(\tilde{\tau}_n^{m_j}, \tilde{p}_n^{m_j})\}_{j \geq 1}$ pour simplifier l'écriture, qui converge vers un élément $(\tilde{\tau}_n^\infty, \tilde{p}_n^\infty) \in \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$ (Lemme 3.1). Cet élément vérifie, par conséquent, la relation fonctionnelle $\tilde{p}_n^\infty \circ g_1 = \tilde{p}_n^\infty$ sur l'arc γ_1 . En effet, pour $z \in \gamma_1$ il existe une suite $\{z_{1,k_j}^{m_j}\}_{j \geq 1}$ avec $z_{1,k_j}^{m_j} \in \sigma^{m_j}$ et vérifiant $\lim_{j \rightarrow \infty} z_{1,k_j}^{m_j} = z$. Pour des raisons de continuité et de convergence, nous avons alors, d'une part

$$\begin{aligned} |\tilde{p}_n^\infty(g_1(z)) - \tilde{p}_n^\infty(z)| &= \lim_{j \rightarrow \infty} |\tilde{p}_n^\infty(g_1(z_{1,k_j}^{m_j})) - \tilde{p}_n^\infty(z_{1,k_j}^{m_j})| \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} |\tilde{p}_n^{m_l}(g_1(z_{1,k_j}^{m_j})) - \tilde{p}_n^{m_l}(z_{1,k_j}^{m_j})| \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} |\tilde{p}_n^\infty(g_1(z)) - \tilde{p}_n^\infty(z)| &= \lim_{l \rightarrow \infty} |\tilde{p}_n^{m_l}(g_1(z)) - \tilde{p}_n^{m_l}(z)| \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} |\tilde{p}_n^{m_l}(g_1(z_{1,k_j}^{m_j})) - \tilde{p}_n^{m_l}(z_{1,k_j}^{m_j})|. \end{aligned}$$

D'où

$$|\tilde{p}_n^\infty(g_1(z)) - \tilde{p}_n^\infty(z)| = \lim_{j \rightarrow \infty} \underbrace{|\tilde{p}_n^{m_j}(g_1(z_{1,k_j}^{m_j})) - \tilde{p}_n^{m_j}(z_{1,k_j}^{m_j})|}_{= 0 \text{ par (3.62)}} = 0.$$

Par holomorphie, la relation fonctionnelle $\tilde{p}_n^\infty \circ g_1 = \tilde{p}_n^\infty$ est vérifiée sur \mathbb{D} tout entier. Puisque $\tilde{p}_n^\infty(0) = 0$, cette relation implique que les éléments de l'ensemble $\{g_1^r(0) \mid r \in \mathbb{Z}\}$ sont des zéros

(distincts) du polynôme \tilde{p}_n^∞ . Le degré de \tilde{p}_n^∞ étant plus petit ou égal à n , \tilde{p}_n^∞ doit être alors identiquement nul. Ceci est une contradiction avec le fait que \tilde{p}_n^∞ possède, par construction, un coefficient de module complexe égal à 1. Ainsi, une telle suite $\{m_j\}_{j \geq 1}$ n'existe pas et la proposition est démontrée. \square

Remarque 3.63 Pour $n \geq 1$ donné, la valeur de M_n est liée au rang de la $4M \times (n+1)$ -matrice A donnée dans la Table 1.4. En général, le rang de A est égal à $\max\{4M, n+1\}$. Suite aux expérimentations numériques effectuées, nous avons constaté, tout comme P. Buser et R. Silhol, qu'il semble que $M_n = \lceil \frac{n+1}{4} \rceil$, où $\lceil \cdot \rceil$ signifie la partie entière supérieure.

Proposition 3.64 Pour chaque entier $n \geq 1$, la suite $\{(\tau_n^M, p_n^M)\}_{M \geq M_n} \subset \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$ est bornée dans $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$.

Preuve. La démonstration de cette proposition est décomposée en trois assertions. Soit un entier $n \geq 1$ fixé. Soient M_n un entier et $\{(\tau_n^M, p_n^M)\}_{M \geq M_n}$ une suite comme définis dans la Proposition 3.59 ainsi que $(\tau_n^\Gamma, p_n^\Gamma)$ l'unique élément de $\mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$ qui minimise la fonctionnelle φ_Γ sur $\mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$ (Théorème 3.51).

Assertion 1 : deux inégalités. Soit $M \geq M_n$. Par définition de (τ_n^M, p_n^M) , nous avons

$$RN_{\sigma^M}^2(\tau_n^M, p_n^M) \leq RN_{\sigma^M}^2(\tau_n^\Gamma, p_n^\Gamma).$$

De plus, nous avons (Lemme 3.56)

$$\lim_{M \rightarrow \infty} RN_{\sigma^M}^2(\tau_n^\Gamma, p_n^\Gamma) = \varphi_\Gamma(\tau_n^\Gamma, p_n^\Gamma).$$

Il existe ainsi une constante C_n , dépendante de n mais indépendante de M , telle que

$$RN_{\sigma^M}^2(\tau_n^M, p_n^M) \leq C_n^2. \quad (3.65)$$

Par définition du résidu normalisé RN_{σ^M} , cette inégalité implique que

$$\sum_{k=1}^M |p_n^M(g_1(z_{1,k}^M)) - p_n^M(z_{1,k}^M) - 2|^2 \leq M \cdot C_n^2.$$

Il existe donc au moins $l_M = \lfloor \frac{M}{2} \rfloor$ termes de cette somme qui sont majorés par C_n^2 , où $\lfloor \cdot \rfloor$ signifie la partie entière inférieure. Autrement dit, il existe des nombres $k_1, \dots, k_{l_M} \in \{1, 2, \dots, M\}$ tels que

$$|p_n^M(g_1(z_{1,k_i}^M)) - p_n^M(z_{1,k_i}^M) - 2| \leq C_n, \quad i = 1, \dots, l_M,$$

ou encore, tels que

$$|p_n^M(g_1(z_{1,k_i}^M)) - p_n^M(z_{1,k_i}^M)| \leq C_n + 2, \quad i = 1, \dots, l_M. \quad (3.66)$$

Assertion 2 : si la suite $\{p_n^M\}_{M \geq M_n} \subset \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$ est bornée, alors la suite $\{\tau_n^M\}_{M \geq M_n} \subset \mathbb{C}$ l'est aussi. En reprenant le même argument que ci-dessus, de l'Inégalité (3.65) découle l'existence, pour tout $M \geq M_n$, d'un nombre $k_M \in \{1, 2, \dots, M\}$ tel que

$$|p_n^M(g_3(z_{3,k_M}^M)) - p_n^M(z_{3,k_M}^M) - 2\tau_n^M| \leq C_n$$

La borne C_n étant indépendante de M , il vient que la suite $\{\tau_n^M\}_{M \geq M_n}$ doit être bornée.

Assertion 3 : la suite $\{p_n^M\}_{M \geq M_n}$ est bornée. Nous procédons par l'absurde. Supposons donc que la suite $\{p_n^M\}_{M \geq M_n}$ n'est pas bornée. Soient $\{p_n^{m_j}\}_{j \geq 1}$ une sous-suite de $\{p_n^M\}_{M \geq M_n}$ telle que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{z \in \tilde{D}} |p_n^{m_j}(z)| = \infty$$

et $\{\alpha^j\}_{j \geq 1}$ la suite définie par $\alpha^j = \max\{|a_{n,1}^{m_j}|, \dots, |a_{n,n}^{m_j}|\}$. Puisque $\lim_{j \rightarrow \infty} \alpha^j = \infty$, nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $\alpha^j > 0$ pour tout $j \geq 1$. Notons

$$p_n^{m_j}(z) = \sum_{k=1}^n a_{n,k}^{m_j} z^{2k-1}, \quad z \in \mathbb{D},$$

$$\tilde{p}_n^{m_j}(z) = \frac{1}{\alpha^j} p_n^{m_j}(z) = \sum_{k=1}^n \frac{a_{n,k}^{m_j}}{\alpha^j} z^{2k-1}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Pour chaque $j \geq 1$, les coefficients de $\tilde{p}_n^{m_j}$ sont tous de module complexe plus petit ou égal à 1, et au moins *un* de ces coefficients est de module complexe *égal* à 1. La suite $\{\tilde{p}_n^{m_j}\}_{j \geq 1}$ étant alors bornée, elle possède une sous-suite qui converge vers un polynôme $\tilde{p}_n^\infty \in \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$ uniformément localement dans \tilde{D} (Théorème de Montel).

Pour chaque $j \geq 1$, l'Inégalité (3.66) implique l'existence d'au moins $l_M = \lfloor \frac{M}{2} \rfloor$ points de l'arc γ_1 vérifiant

$$|\tilde{p}_n^{m_j}(g_1(z_{1,k_i}^{m_j})) - \tilde{p}_n^{m_j}(z_{1,k_i}^{m_j})| \leq \frac{C_n + 2}{\alpha^j}, \quad i = 1, \dots, l_M. \quad (3.67)$$

Notons qu'ici l'important est que le nombre de points $z_{1,k}^{m_j}$ vérifiant l'Inégalité (3.67) augmente lorsque j augmente, i.e. lorsque m_j augmente. Grâce à l'Inégalité (3.67), à la convergence uniforme locale dans $\tilde{D} \supset \tilde{D}_1^{\min} \supset \gamma_1$ d'une sous-suite de $\{\tilde{p}_n^{m_j}\}_{j \geq 1}$ et à l'holomorphicité, le polynôme \tilde{p}_n^∞ vérifie la relation fonctionnelle $\tilde{p}_n^\infty \circ g_1 = \tilde{p}_n^\infty$ sur \mathbb{D} tout entier (cf. Lemme 3.68 ci-après). Puisque $\tilde{p}_n^\infty(0) = 0$, cette relation fonctionnelle implique que les éléments de l'ensemble $\{g_1^r(0) \mid r \in \mathbb{Z}\}$ sont des zéros (distincts) du polynôme \tilde{p}_n^∞ . Le degré de \tilde{p}_n^∞ étant plus petit ou égal à n , \tilde{p}_n^∞ doit être identiquement nul. Ceci est en contradiction avec le fait que \tilde{p}_n^∞ possède, par construction, un coefficient de module complexe égal à 1. Par conséquent, la suite $\{p_n^M\}_{M \geq M_n}$ doit être bornée et ainsi la suite $\{(\tau_n^M, p_n^M)\}_{M \geq M_n}$ l'est aussi grâce à l'Assertion 2. D'où la proposition. \square

Lemme 3.68 *Pour chaque entier $n \geq 1$, le polynôme \tilde{p}_n^∞ (provenant de la preuve ci-dessus) vérifie la relation fonctionnelle $\tilde{p}_n^\infty \circ g_1 = \tilde{p}_n^\infty$ sur \mathbb{D} tout entier.*

Preuve. Soit un entier $n \geq 1$ fixé. Nous reprenons la notation de la preuve précédente ainsi que les définitions de t_k^M (page 93) et des paramétrisations γ_i (page 95). Par holomorphicité, il suffit de montrer l'existence d'un ensemble ayant un point d'accumulation sur lequel cette relation fonctionnelle est satisfaite. Sans perte de généralité, et pour ne pas allourdir plus la

notation, nous pouvons supposer que c'est la suite $\{\tilde{p}_n^{m_j}\}_{j \geq 1}$ qui converge vers \tilde{p}_n^∞ uniformément localement dans \tilde{D} . Posons

$$E_n^{m_j} = \{t_k^{m_j}\}_{k=1}^{m_j} \cap \{t \in [0, 1] \mid \gamma_1(t) \text{ vérifie l'Inégalité (3.67)}\} \subset [0, 1], \quad j \geq 1,$$

$$E_n = \{s \in [0, 1] \mid \text{il existe } \{s^{m_{j_k}}\}_{k \geq 1} \text{ vérifiant } s^{m_{j_k}} \in E_n^{m_{j_k}} \text{ et } \lim_{k \rightarrow \infty} s^{m_{j_k}} = s\}.$$

Notons que dans la définition de E_n , la suite d'indices $\{m_{j_k}\}_{k \geq 1}$ est une sous-suite de $\{m_j\}_{j \geq 1}$. Rappelons que l'ensemble $E_n^{m_j}$ possède au moins $\lfloor \frac{m_j}{2} \rfloor$ éléments (cf. Inégalité (3.67) avec $z_{1,k}^{m_j} = \gamma_1(t_k^{m_j})$). Nous allons d'abord montrer que l'ensemble E_n est non vide et possède un point d'accumulation (Assertions 1 et 2) et ensuite que la relation fonctionnelle $\tilde{p}_n^\infty \circ g_1 = \tilde{p}_n^\infty$ est vérifiée sur $\gamma_1(E_n)$ (Assertion 3).

Assertion 1 : l'ensemble E_n contient une infinité d'éléments. Tout d'abord, notons que l'ensemble E_n est non vide car toute suite $\{t^j\}_{j \geq 1}$ avec $t^j \in E_n^{m_j} \subset [0, 1]$ est bornée et possède donc une sous-suite convergeant vers un point $t \in [0, 1]$ et ainsi $t \in E_n$. Maintenant, démontrons par l'absurde que E_n possède une infinité d'éléments. Supposons que $E_n = \{s_1, \dots, s_r\}$ possède exactement $r \geq 1$ éléments. Pour chaque $i = 1, \dots, r$, nous définissons l'intervalle

$$I^i =]s_i - \frac{1}{4r}, s_i + \frac{1}{4r}[\cap [0, 1].$$

Notons que, pour chaque $i = 1, \dots, r$, l'intervalle I^i est ouvert dans $[0, 1]$, de longueur au plus $\frac{1}{2r}$ et contient s_i . Il est possible que certains intervalles I^i s'intersectent, mais cela ne gêne aucunement, l'important étant que

$$\ell_{eucl}(I^1 \cup \dots \cup I^r) \leq \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$\ell_{eucl}([0, 1] \setminus (I^1 \cup \dots \cup I^r)) \geq \frac{1}{2}.$$

Pour tout entier $m_j \geq 2r$, l'ensemble $E_n^{m_j} \setminus (I^1 \cup \dots \cup I^r)$ est par conséquent non vide car les intervalles I^i sont ouverts et de longueur $\frac{1}{2r}$. Nous pouvons construire une suite $\{t^{m_j}\}_{m_j \geq 2r}$ telle que $t^{m_j} \in E_n^{m_j} \setminus (I^1 \cup \dots \cup I^r)$. Étant bornée, une telle suite admet une sous-suite convergeant vers un point $t \in [0, 1]$ et ainsi $t \in E_n$. Or, $t \neq s_i$ pour tout $i = 1, \dots, r$, ce qui est une contradiction. L'ensemble E_n possède donc une infinité d'éléments.

Assertion 2 : l'ensemble E_n possède un point d'accumulation. Puisque E_n est inclus dans l'intervalle $[0, 1]$ qui est compact, il suffit de démontrer que E_n est fermé. Soient donc $\{t_l\}_{l \geq 1} \subset E_n$ une suite convergeant vers un point $t \in [0, 1]$ et, pour chaque $l \geq 1$, une suite $\{t_l^{m_{l,k}}\}_{k \geq 1}$ telle que $t_l^{m_{l,k}} \in E_n^{m_{l,k}}$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} t_l^{m_{l,k}} = t_l$. (Pour chaque l , la suite $\{m_{l,k}\}_{k \geq 1}$ est donc une sous-suite de $\{m_j\}_{j \geq 1}$.) Montrons que $t \in E_n$. Pour cela, nous construisons une suite $\{s_r\}_{r \geq 1}$ convergeant vers t . Posons $s_1 = t_1^{m_{1,1}}$ et pour chaque entier $r \geq 2$

$$s_r = t_r^{m_{r,k_r}}$$

tel que

$$|t_r - s_r| < \frac{1}{r} \quad \text{et} \quad m_{r,k_r} > m_{r-1,k_{r-1}}.$$

Nous avons, en particulier, $s_r \in E_n^{m_r, k_r}$. À présent, soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors un entier $R_\varepsilon \geq 2$ tel que, pour tout $r \geq R_\varepsilon$,

$$|t - t_r| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |t_r - s_r| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout entier $r \geq R_\varepsilon$, nous obtenons ainsi

$$|t - s_r| \leq |t - t_r| + |t_r - s_r| < \varepsilon.$$

Autrement dit, la suite $\{s_r\}_{r \geq 1}$ converge vers t . La construction de la suite $\{s_r\}_{r \geq 1}$ implique alors que $t \in E_n$. L'ensemble E_n est ainsi fermé et possède donc un point d'accumulation. D'où l'assertion.

Assertion 3 : la relation fonctionnelle $\tilde{p}_n^\infty \circ g_1 = \tilde{p}_n^\infty$ est vérifiée sur $\gamma_1(E_n)$. Soient $s \in E_n$ et $\{s^{m_{j_k}}\}_{k \geq 1}$ avec $s^{m_{j_k}} \in E_n^{m_{j_k}}$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} s^{m_{j_k}} = s$. Notons $z = \gamma_1(s)$ et $z^{m_{j_k}} = \gamma_1(s^{m_{j_k}})$. Pour des raisons de continuité et de convergence, nous avons d'une part

$$\begin{aligned} |\tilde{p}_n^\infty(g_1(z)) - \tilde{p}_n^\infty(z)| &= \lim_{k \rightarrow \infty} |\tilde{p}_n^\infty(g_1(z^{m_{j_k}})) - \tilde{p}_n^\infty(z^{m_{j_k}})| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} |\tilde{p}_n^{m_{j_l}}(g_1(z^{m_{j_k}})) - \tilde{p}_n^{m_{j_l}}(z^{m_{j_k}})| \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} |\tilde{p}_n^\infty(g_1(z)) - \tilde{p}_n^\infty(z)| &= \lim_{l \rightarrow \infty} |\tilde{p}_n^{m_{j_l}}(g_1(z)) - \tilde{p}_n^{m_{j_l}}(z)| \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} |\tilde{p}_n^{m_{j_l}}(g_1(z^{m_{j_k}})) - \tilde{p}_n^{m_{j_l}}(z^{m_{j_k}})|. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$|\tilde{p}_n^\infty(g_1(z)) - \tilde{p}_n^\infty(z)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\tilde{p}_n^{m_{j_k}}(g_1(z^{m_{j_k}})) - \tilde{p}_n^{m_{j_k}}(z^{m_{j_k}})| = 0$$

où la dernière égalité est due à l'Inégalité (3.67) de la page 100. Ainsi, la relation fonctionnelle $\tilde{p}_n^\infty \circ g_1 = \tilde{p}_n^\infty$ est vérifiée sur $\gamma_1(E_n)$, l'assertion est démontrée et le lemme s'ensuit. \square

Lemme 3.69 *Pour chaque entier $n \geq 1$, la suite $\{(\tau_n^M, p_n^M)\}_{M \geq M_n} \subset \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$ possède un unique point d'accumulation dans $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$. Ce point d'accumulation est $(\tau_n^\Gamma, p_n^\Gamma)$.*

Preuve. Puisque la suite $\{(\tau_n^M, p_n^M)\}_{M \geq M_n}$ est bornée dans X (Proposition 3.64), elle possède une sous-suite $\{(\tau_n^{m_k}, p_n^{m_k})\}_{k \geq 1}$ convergeant vers un élément $(\tau_n, p_n) \in C \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$ (Lemme 3.1). D'une part, par le Lemme 3.56 et la continuité de $RN_{\sigma^L}^2$ sur X (Remarque 3.58.a)), nous avons

$$\begin{aligned} \varphi_\Gamma(\tau_n, p_n) &= \lim_{L \rightarrow \infty} RN_{\sigma^L}^2(\tau_n, p_n) \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} RN_{\sigma^L}^2(\tau_n^{m_k}, p_n^{m_k}). \end{aligned}$$

D'autre part, la continuité de φ_Γ (Corollaire 3.50) et le Lemme 3.56 nous donnent

$$\begin{aligned}\varphi_\Gamma(\tau_n, p_n) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_\Gamma(\tau_n^{m_k}, p_n^{m_k}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty} RN_{\sigma^L}^2(\tau_n^{m_k}, p_n^{m_k}).\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} RN_{\sigma^{m_k}}^2(\tau_n^{m_k}, p_n^{m_k}) = \varphi_\Gamma(\tau_n, p_n).$$

Si nous montrons l'égalité

$$\varphi_\Gamma(\tau_n, p_n) = \varphi_\Gamma(\tau_n^\Gamma, p_n^\Gamma),$$

où $(\tau_n^\Gamma, p_n^\Gamma)$ est l'unique élément réalisant le minimum de la fonctionnelle φ_Γ sur $\mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$ (Théorème 3.51), alors $(\tau_n, p_n) = (\tau_n^\Gamma, p_n^\Gamma)$ et le lemme est démontré. Or, d'une part, nous avons

$$\varphi_\Gamma(\tau_n, p_n) \geq \varphi_\Gamma(\tau_n^\Gamma, p_n^\Gamma)$$

par définition de $(\tau_n^\Gamma, p_n^\Gamma)$. D'autre part, par minimalité de $(\tau_n^{m_k}, p_n^{m_k})$, nous avons, pour tout $k \geq 1$,

$$RN_{\sigma^{m_k}}^2(\tau_n^{m_k}, p_n^{m_k}) \leq RN_{\sigma^{m_k}}^2(\tau_n^\Gamma, p_n^\Gamma).$$

À la limite $k \rightarrow \infty$, nous obtenons (Lemme 3.56)

$$\varphi_\Gamma(\tau_n, p_n) \leq \varphi_\Gamma(\tau_n^\Gamma, p_n^\Gamma).$$

D'où l'égalité

$$\varphi_\Gamma(\tau_n, p_n) = \varphi_\Gamma(\tau_n^\Gamma, p_n^\Gamma).$$

Ainsi, toute sous-suite convergente de $\{(\tau_n^M, p_n^M)\}_{M \geq M_n}$ converge vers $(\tau_n^\Gamma, p_n^\Gamma)$ et le lemme est démontré. \square

Proposition 3.70 *Pour chaque entier $n \geq 1$, la suite $\{(\tau_n^M, p_n^M)\}_{M \geq M_n}$ converge, au sens de la norme $\|\cdot\|_X$, vers $(\tau_n^\Gamma, p_n^\Gamma) \in \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$. En particulier, la suite $\{\tau_n^M\}_{M \geq M_n}$ converge vers τ_n^Γ et, pour tout entier $k \geq 0$, la suite $\{p_n^{M(k)}\}_{M \geq M_n}$ converge vers $p_n^{\Gamma(k)}$ uniformément localement dans \tilde{D} .*

Preuve. Soit $n \geq 1$ un entier fixé. Puisque la suite $\{(\tau_n^M, p_n^M)\}_{M \geq M_n}$ est bornée (Proposition 3.64) et ne possède qu'un unique point d'accumulation (Corollaire 3.69), à savoir $(\tau_n^\Gamma, p_n^\Gamma)$, elle doit être convergente car sinon elle posséderait un deuxième point d'accumulation. La deuxième partie de la proposition découle alors du Lemme 3.2. \square

Théorème 3.71 *Soit $\{(\tau_n^{m_n}, p_n^{m_n})\}_{n \geq 1} \subset X$ une suite vérifiant*

$$m_n \geq M_n,$$

$$(\tau_n^{m_n}, p_n^{m_n}) \in \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1},$$

$$RN_{\sigma^{m_n}}(\tau_n^{m_n}, p_n^{m_n}) = \min \left\{ RN_{\sigma^{m_n}}(\tau, p) \mid (\tau, p) \in \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1} \right\},$$

pour tout $n \geq 1$. Si la Conjecture 3.52 est vraie, alors la suite $\{\tau_n^{m_n}\}_{n \geq 1}$ converge vers τ_{BS} et, pour tout entier $k \geq 0$, la suite de polynômes $\{p_n^{m_n(k)}\}_{n \geq 1}$ converge vers $f_{\text{BS}}^{(k)}$ uniformément localement dans \mathcal{O} .

Preuve. Soient des entiers $n \geq 1$ et $k \geq 1$. Alors, les inégalités

$$\begin{aligned} |\tau_n^{m_n} - \tau_{\text{BS}}| &\leq |\tau_n^{m_n} - \tau_n^\Gamma| + |\tau_n^\Gamma - \tau_{\text{BS}}|, \\ |p_n^{m_n(k)} - f_{\text{BS}}^{(k)}| &\leq |p_n^{m_n(k)} - p_n^{\Gamma(k)}| + |p_n^{\Gamma(k)} - f_{\text{BS}}^{(k)}|, \end{aligned}$$

la Conjecture 3.52 (supposée vraie) et la Proposition 3.70 démontrent le théorème. \square

Corollaire 3.72 *Si la Conjecture 3.52 est vraie, la méthode d'approximation de Buser-Silhol pour l'uniformisation conforme des surfaces de Riemann hyperelliptiques de genre 2 est convergente.*

Remarque 3.73 Lors de leurs expérimentations numériques, P. Buser et R. Silhol observent qu'environ le premier quart ou le premier tiers des coefficients des approximations polynomiales sont relativement proches des coefficients de Taylor de f_{BS} (cf. [BS05b, Remark 3.3]). Si la Conjecture 3.52 est vraie, ce phénomène serait, peut-être, expliqué par la convergence simultanée de $\{p_n^{m_n}\}_{n \geq 1}$ vers f_{BS} , c'est-à-dire la convergence de $\{p_n^{m_n(k)}\}_{n \geq 1}$ vers $f_{\text{BS}}^{(k)}$ pour tout $k \geq 0$.

3.5 Approximation par minimisation de semi-norme sur des domaines

Dans cette dernière section, nous nous intéressons à approcher, pour $n \geq 1$ donné, (τ_n^Y, p_n^Y) (et par suite $(\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$) par des éléments $(\tau_n^{\sigma^i}, p_n^{\sigma^i}) \in \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$ obtenus via la minimisation des fonctionnelles $RN_{\sigma^i}^2$ sur $\mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$ où $\sigma = \{\sigma^i\}_{i \geq 1}$ est une famille d'ensembles σ^i de $4M_i$ points relativement uniformément répartis sur un domaine D , et non pas sur des arcs de courbes comme à la section précédente, et devenant de plus en plus dense dans D lorsque i augmente. Par *relativement uniformément répartis*, nous entendons avoir un certain contrôle sur les distances minimale et maximale entre un point donné de σ^i et ses plus proches voisins dans σ^i . Cette notion est formalisée dans la définition ci-après.

Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine de Jordan dont le bord est différentiable par morceaux.

Définition 3.74 Soit $\varepsilon > 0$. Un ε -net de D est un ensemble de M_ε points $\sigma^\varepsilon = \{z_k^\varepsilon\}_{k=1}^{M_\varepsilon} \subset D$ tel que les boules euclidiennes ouvertes de rayon ε centrées en σ^ε recouvrent D et que les boules euclidiennes ouvertes de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$ centrées en les éléments de σ^ε soient deux à deux disjointes. Autrement dit,

$$D \subset \bigcup_{k=1}^{M_\varepsilon} B(z_k^\varepsilon, \varepsilon) \quad \text{et} \quad B(z_k^\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B(z_l^\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2}) = \emptyset \quad \text{pour tout } k \neq l,$$

où $B(z_k^\varepsilon, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z_k^\varepsilon - z| < \varepsilon\}$. Un point $z \in \sigma^\varepsilon$ est appelé un *bon point* de σ^ε si $B(z, \frac{\varepsilon}{2}) \subset D$ sinon z est appelé un *mauvais point* de σ^ε .

Remarque 3.75

- a) Pour $\varepsilon > 0$ fixé, deux ε -nets d'un même domaine peuvent avoir des densités relativement différentes (cf. Figure 3.9).

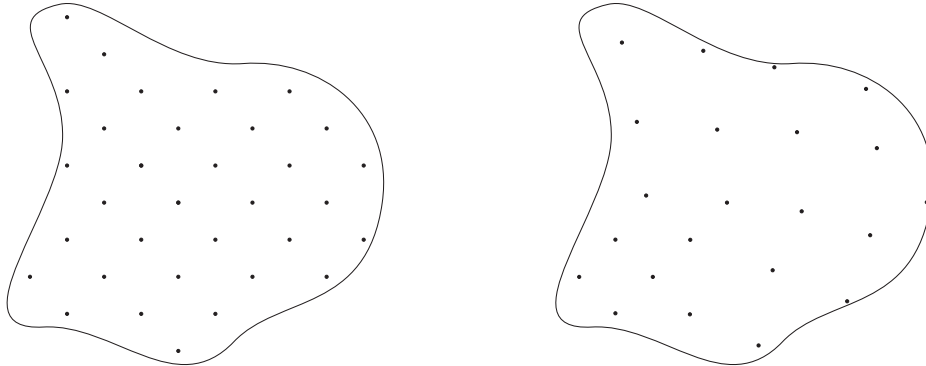


FIGURE 3.9. Deux ε -nets d'un même domaine (avec ε fixé).

- b) Pour un domaine D donné, nous supposons toujours que ε et σ^ε sont choisis tels que σ^ε contienne un bon point. La justification de cette hypothèse apparaîtra plus bas.
- c) La notion d' ε -net est définie plus généralement pour un sous-ensemble d'un espace métrique, mais nous en avons restreint ici la définition à nos besoins. La notion d' ε -net permet, en quelque sorte, de généraliser aux espaces métriques la notion de réseaux euclidiens. Mentionnons encore que pour tout $\varepsilon > 0$ et D arbitraire, l'existence d'un ε -net est assuré (démonstration à l'aide du Lemme de Zorn).

Soient $\varepsilon > 0$ et σ^ε un ε -net de D . Nous nous intéressons aux relations entre ε , M_ε , $\text{Aire}(D)$ et $\text{Long}(\partial D)$, où $\text{Aire}(D)$ est l'aire euclidienne de D et $\text{Long}(\partial D)$ la longueur euclidienne du bord de D . Les boules de rayon ε centrées en σ^ε recouvrant D , nous avons

$$M_\varepsilon \pi \varepsilon^2 \geq \text{Aire}(D). \quad (3.76)$$

Puisque les boules de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$ centrées en σ^ε ne sont pas nécessairement toutes contenues dans D , l'inégalité $M_\varepsilon \pi \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \leq \text{Aire}(D)$ n'est, en général, pas garantie. Nous avons néanmoins un certain contrôle sur la proportion des boules de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$ non entièrement contenues dans D , et cela comme suit. Notons $\widetilde{M}_\varepsilon$ le nombre de mauvais points de σ^ε . Nous avons alors

$$\left(M_\varepsilon - \widetilde{M}_\varepsilon\right) \pi \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \leq \text{Aire}(D). \quad (3.77)$$

Nous cherchons à majorer le nombre de mauvais points $\widetilde{M}_\varepsilon$. Pour trouver une telle borne, nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 3.78 *Dans le plan euclidien, un chemin intersectant trois boules euclidiennes fermées de rayon $r > 0$ dont les intérieurs sont deux à deux disjoints est de longueur euclidienne supérieure ou égale à*

$$2 \left(\sqrt{5 - 2\sqrt{3}} - 1 \right) r.$$

Remarque 3.79 La borne énoncée dans le Lemme 3.78 est optimale, comme le démontrera la preuve ci-après. En fait, seule l'existence d'une telle borne positive est essentielle pour notre argumentation ultérieure. Toutefois, il nous est apparu intéressant d'obtenir explicitement cette borne optimale car, à notre sens, sa valeur n'est pas immédiate, même si sa démonstration ne requiert que des arguments de géométrie euclidienne élémentaire.

Preuve du Lemme 3.78. Soit $r > 0$. Pour chaque configuration de trois boules euclidiennes $B_1, B_2, B_3 \subset \mathbb{R}^2$ de rayon r donné, il existe un chemin *minimal* (i.e. de longueur minimale) par continuité de la fonction $(\mathbb{R}^2)^4 \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$(a, b, c, d) \mapsto \|b - a\|_{\mathbb{R}^2} + \|c - b\|_{\mathbb{R}^2} + \|d - c\|_{\mathbb{R}^2}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}^2,$$

et la compacité de $\partial B_1 \times \partial B_2 \times \partial B_2 \times \partial B_3 \subset (\mathbb{R}^2)^4$. (Il est clair qu'un chemin minimal est un chemin polygonal.) Puisque l'intersection des adhérences des trois boules est vide, un chemin minimal est nécessairement non constant et donc de longueur strictement positive. Nous dirons qu'un chemin est *optimal* s'il n'existe pas de configuration de trois boules admettant un chemin minimal de longueur strictement inférieure. Nous appellerons *configuration optimale* la configuration (à isométrie euclidienne près) obtenue lorsque les trois boules fermées sont deux à deux non disjointes (cf. Figure 3.10). Nous démontrons le lemme via deux assertions. Nous montrons d'abord que seule la configuration optimale admet un chemin optimal (Assertion 1), et ensuite que la longueur d'un chemin optimal est la borne de l'énoncé du lemme (Assertion 2).

Assertion 1 : un chemin optimal ne peut être réalisé que dans la configuration optimale. Nous montrons, via les Étapes 1 à 4 ci-dessous, qu'une configuration différente de la configuration optimale peut toujours être perturbée de sorte qu'un chemin minimal de la nouvelle configuration soit de longueur strictement inférieure à la longueur d'un chemin minimal de la configuration initiale (i.e. avant perturbation). De plus, après les 4 étapes successives ci-dessous toute configuration non optimale est ramenée à la configuration optimale.

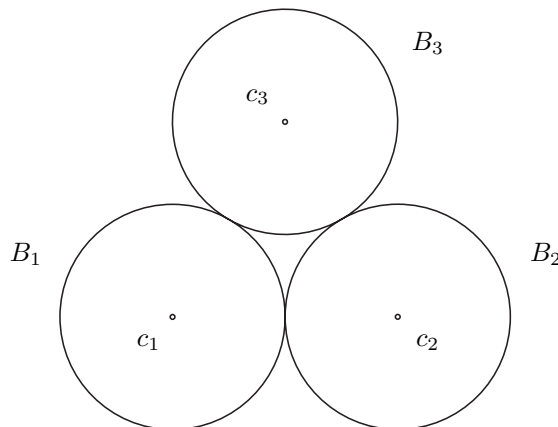


FIGURE 3.10. Configuration optimale de trois boules.

Soient donc une configuration non optimale de trois boules $B_1, B_2, B_3 \subset \mathbb{R}^2$ de rayon r centrées en c_1, c_2, c_3 respectivement et α un chemin minimal dans cette configuration. Les trois boules sont numérotées consécutivement le long de α . Nous dirons qu'une boule de la configuration est une boule *libre* si son bord est disjoint des deux autres boules fermées.

Après chaque étape, les boules B_1, B_2, B_3 sont renommées et le chemin α est supposé minimal dans la nouvelle configuration.

Étape 1. Si la boule B_1 de la configuration est une boule libre, alors nous effectuons une translation de B_1 le long de α (cf. Figure 3.11) jusqu'à ce que le bord de B_1 intersecte le bord d'une des deux autres boules. Nous obtenons alors une nouvelle configuration et un nouveau

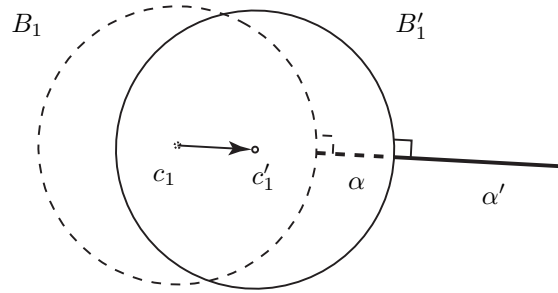


FIGURE 3.11. *Étape 1 : translation de la boule libre B_1 le long de α .*

chemin $\alpha' \subset \alpha$ reliant les trois boules et vérifiant $\text{Long}(\alpha') < \text{Long}(\alpha)$. Notons que le chemin α' n'est pas nécessairement minimal pour la nouvelle configuration. La nouvelle configuration admet alors zéro ou une boule libre.

Si la boule B_3 est libre nous (re)faisons l'Étape 1 avec cette boule et nous considérons la nouvelle configuration.

Après l'Étape 1, nous pouvons supposer que les boules B_1 et B_3 de la configuration ne sont pas libres.

Étape 2. Si la boule B_2 est libre, alors nous effectuons une translation de B_2 le long de la bissectrice de l'angle formé par α en $p \in \partial B_2$ (cf. Figure 3.12), jusqu'à ce que le bord de B_2 intersecte le bord d'une des deux autres boules. La nouvelle configuration n'admet aucune boule libre.

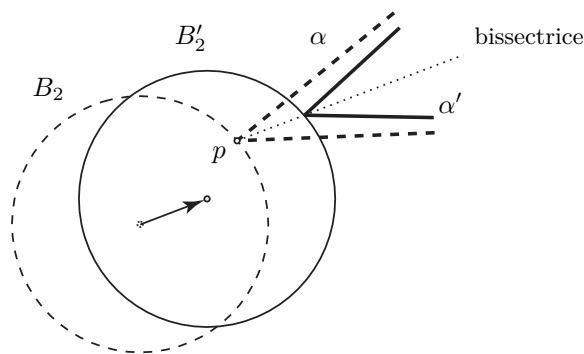


FIGURE 3.12. *Étape 2 : translation de la boule libre B_2 le long de la bissectrice de l'angle formé par α au point de contact avec ∂B_2 .*

Après l'Étape 2, nous pouvons supposer que la configuration n'admette pas de boules libres.

Étape 3. Si le chemin α intersecte ∂B_2 en deux points p, q , alors, par minimalité, α est le segment de droite réalisant la distance entre les boules B_1 et B_3 . Dans ce cas, nous effectuons la rotation de B_1 autour c_2 jusqu'à ce que le chemin α' réalisant la distance entre les boules extrémités soit tangent à B_2 en un point p' (cf. Figure 3.13).

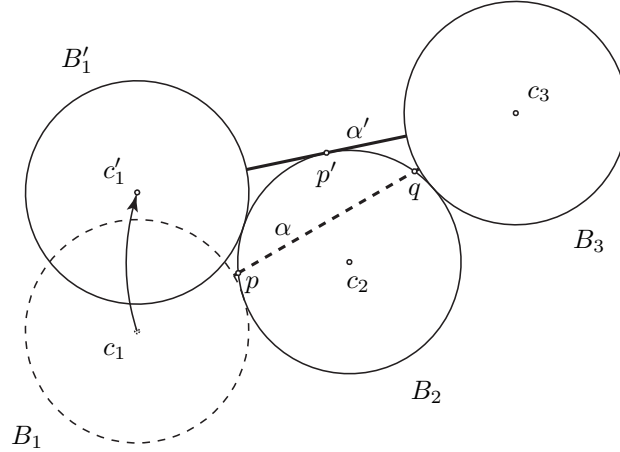


FIGURE 3.13. Étape 3 : rotation de la boule B_1 autour de c_2 .

Après l'Étape 3, nous pouvons supposer que la configuration n'admette pas de boules libres et que le chemin α n'intersecte ∂B_2 qu'en un unique point.

Étape 4. Si le chemin minimal α intersecte ∂B_2 en un unique point p , alors nous effectuons une rotation de B_1 autour de c_2 jusqu'à ce que son bord intersecte ∂B_3 , autrement dit, jusqu'à ce que les trois boules soient dans la configuration optimale (cf. Figure 3.14). Notons p' le point appartenant à l'intersection de ∂B_2 et de la bissectrice de l'angle $\angle c'_1 c_2 c_3$, et α' le chemin reliant les trois boules défini par $d(p', B'_1) = d(p', B_3) = \frac{1}{2} \text{Long}(\alpha')$. Nous obtenons alors $\text{Long}(\alpha') < \text{Long}(\alpha)$.

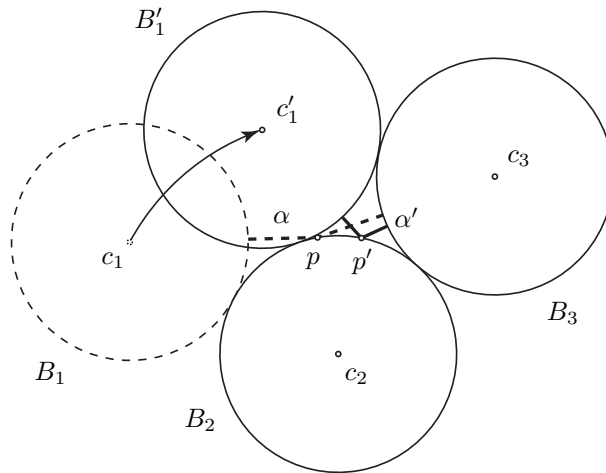


FIGURE 3.14. Étape 4 : rotation de la boule B_1 autour de c_2 .

Il suit de l'Étape 4 qu'un chemin optimale ne peut être réalisé que dans la configuration optimale et l'Assertion 1 est démontrée.

Assertion 2 : la longueur d'un chemin optimal est $2 \left(\sqrt{5 - 2\sqrt{3}} - 1 \right) r$. Dans la configuration optimale, nous considérons le triangle équilatéral $T_{c_1 c_2 c_3}$ de côté de longueur $2r$ et le chemin polygonal α (trait continu gras sur la Figure 3.15) de longueur 2ℓ porté par le périmètre du triangle isocèle $T_{c_1 c_2 p}$. La hauteur du triangle isocèle $T_{c_1 c_2 p}$ issue de p est $h = (\sqrt{3} - 1)r$. Le triangle rectangle $T_{c_1 \frac{c_1+c_2}{2} p}$ nous donne alors l'égalité

$$r^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 r^2 = (r + \ell)^2.$$

En résolvant cette équation pour ℓ , nous obtenons ainsi la longueur du chemin α

$$\text{Long}(\alpha) = 2\ell = 2 \left(\sqrt{5 - 2\sqrt{3}} - 1 \right) r.$$

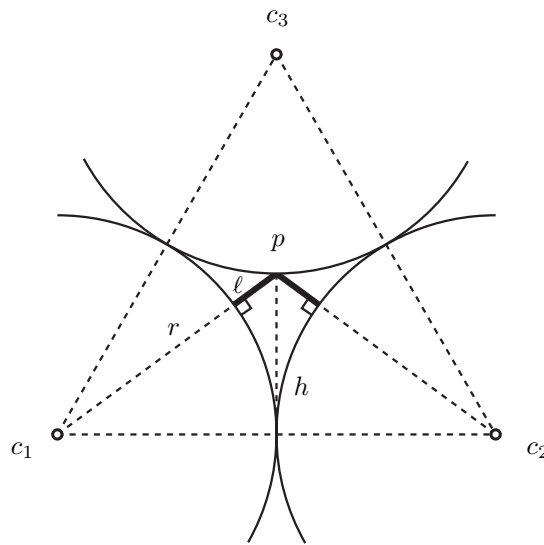


FIGURE 3.15. Un chemin minimal (trait continu gras) dans la configuration optimale. Ce chemin est porté par le triangle isocèle $T_{c_1 c_2 p}$.

Il est clair qu'un chemin α' candidat au titre de chemin optimal doit avoir au moins une de ses extrémités qui intersecte orthogonalement le bord d'une des trois boules, disons la boule de centre c_1 (cf. Figure 3.16). Pour montrer que $\text{Long}(\alpha) < \text{Long}(\alpha')$, il suffit de montrer que le périmètre du triangle $T_{c_1 c_2 p}$ est strictement inférieur au périmètre du triangle $T_{c_1 c_2 p'}$. Puisque la hauteur h' du triangle $T_{c_1 c_2 p'}$ issue de p' est strictement supérieure à h , l'aire du triangle $T_{c_1 c_2 p'}$ est strictement supérieure à l'aire du triangle $T_{c_1 c_2 p}$. Soit $p'' \in B_3$ tel que le triangle $T_{c_1 c_2 p''}$ soit isocèle et de même aire que le triangle $T_{c_1 c_2 p'}$ ($h'' = h'$). Or, parmi les triangles ayant la même base et la même aire, c'est le triangle isocèle qui possède le périmètre le plus petit. Par conséquent, nous avons les inégalités suivantes sur les périmètres

$$\text{Périmètre}(T_{c_1 c_2 p}) < \text{Périmètre}(T_{c_1 c_2 p'}) < \text{Périmètre}(T_{c_1 c_2 p''}).$$

D'où $\text{Long}(\alpha) < \text{Long}(\alpha')$. L'Assertion 2 est ainsi démontrée et le lemme s'ensuit. \square

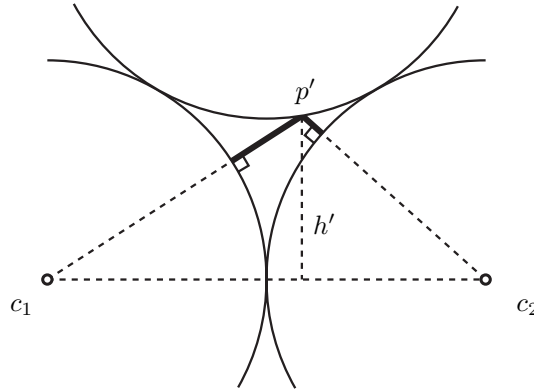


FIGURE 3.16. Un chemin non minimal (trait continu gras) dans la configuration optimale. Ce chemin est porté par le triangle non isocèle $T_{c_1 c_2 p'}$.

Corollaire 3.80 Soit $\varepsilon > 0$. Le nombre de mauvais points d'un ε -net de D vérifie

$$\widetilde{M}_\varepsilon < \frac{3}{\sqrt{5-2\sqrt{3}}-1} \frac{\text{Long}(\partial D)}{\varepsilon} + 3 \quad (3.81)$$

et la proportion de mauvais points

$$\frac{\widetilde{M}_\varepsilon}{M_\varepsilon} < \frac{3}{\sqrt{5-2\sqrt{3}}-1} \frac{\text{Long}(\partial D)}{\text{Aire}(D)} \varepsilon + \frac{3\pi}{\text{Aire}(D)} \varepsilon^2. \quad (3.82)$$

Preuve. Notons $B_1, \dots, B_{\widetilde{M}_\varepsilon}$ les boules de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$ centrées en les mauvais points de l' ε -net et numérotées successivement le long du bord ∂D . Pour relier chaque triple de boules fermées consécutives $\overline{B}_{3k-2}, \overline{B}_{3k-1}, \overline{B}_{3k}$, $k = 1, \dots, \lfloor \frac{\widetilde{M}_\varepsilon}{3} \rfloor$, un arc de ∂D d'une longueur d'au moins $\left(\sqrt{5-2\sqrt{3}}-1\right)\varepsilon$ est nécessaire (Lemme 3.78). Par conséquent, nous avons la majoration

$$\left\lfloor \frac{\widetilde{M}_\varepsilon}{3} \right\rfloor < \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{3}}-1} \frac{\text{Long}(\partial D)}{\varepsilon}.$$

et l'Inégalité (3.81) s'ensuit. L'Inégalité (3.82) découle alors des Inégalités (3.76) et (3.81). \square

L'Inégalité (3.82) montre en particulier que plus ε est petit, plus la proportion de mauvais points d'un ε -net de D est petite. Les Inégalités (3.76) à (3.82) nous seront utiles un peu plus bas.

À présent, soient $\tilde{\delta} > 0$, $\delta \in]0, \tilde{\delta}[$ et les δ -voisinages hyperboliques suivants :

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= N_\delta([s_4, m_5]_h) \subset \subset \tilde{D}_1^{\min} \subset \tilde{D}, \\ \Delta_2 &= N_\delta([s_1, m_2]_h) \subset \subset \tilde{D}_2^{\min} \subset \tilde{D}, \\ \Delta_3 &= N_\delta([s_6, m_7]_h) \subset \subset \tilde{D}_3^{\min} \subset \tilde{D}, \\ \Delta_4 &= N_\delta([s_3, m_4]_h) \subset \subset \tilde{D}_4^{\min} \subset \tilde{D}, \\ \Delta &= \Delta_1 \sqcup \dots \sqcup \Delta_4.\end{aligned}$$

Soit $\varphi_\Delta : X \longrightarrow Y$ la fonctionnelle définie comme φ_Y en remplaçant \tilde{D}_j^{\min} par Δ_j . Au vu des inclusions ci-dessous, nous avons donc $\varphi_\Delta \leq \varphi_Y$.

Définition 3.83 Soient $D \subset \mathbb{C}$ un domaine de Jordan et $E = \{e_1, \dots, e_r\} \subset D$ un ensemble fini de points. Pour $k = 1, \dots, r$, la *cellule de Dirichlet-Voronoi* de e_k dans D est définie par

$$V_k = \{z \in D \mid |z - e_k| \leq |z - e| \text{ pour tout } e \in E\}.$$

L'ensemble $\{V_k\}_{k=1}^r$ est appelé *famille de cellules de Dirichlet-Voronoi* dans D subordonnée à E .

Remarque 3.84

- a) Une cellule de Dirichlet-Voronoi est donc l'intersection d'un nombre fini de demi-plans et de D . Elle est fermée et peut être non connexe.
- b) Une famille $\{V_k\}_{k=1}^r$ de cellules de Dirichlet-Voronoi dans un domaine D vérifie les deux propriétés suivantes : $\cup_{k=1}^r V_k = D$ et $\text{Aire}(V_k \cap V_l) = 0$ pour tout $k \neq l$. Ces deux propriétés sont cruciales dans la définition ci-après (cf. Remarque 3.86).
- c) Lorsque la famille de cellule de Dirichlet-Voronoi est subordonnée à un ε -net, nous avons un certain contrôle sur l'aire de chaque cellule, à savoir $\text{Aire}(V_k) \leq \pi\varepsilon^2$ pour tout $k = 1, \dots, r$.

Définition 3.85 Soient $\varepsilon > 0$, $\sigma^\varepsilon = \{\{z_{j,k}^\varepsilon\}_{k=1}^{M_{j,\varepsilon}}\}_{j=1}^4$ un ε -net de Δ et $\{\{V_{j,k}^\varepsilon\}_{k=1}^{M_{j,\varepsilon}}\}_{j=1}^4$ la famille de cellule de Dirichlet-Voronoi subordonnée à σ^ε . Nous notons $\mathcal{I}_{\sigma^\varepsilon} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonctionnelle non linéaire continue définie par

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\sigma^\varepsilon}(\tau, f) &= \sum_{k=1}^{M_{1,\varepsilon}} \{|f(g_1(z_{1,k}^\varepsilon)) - f(z_{1,k}^\varepsilon) - 2|^2 \text{Aire}(V_{1,k}^\varepsilon) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{M_{2,\varepsilon}} |f(h_2(z_{2,k}^\varepsilon)) - f(z_{2,k}^\varepsilon)|^2 \text{Aire}(V_{2,k}^\varepsilon) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{M_{3,\varepsilon}} |f(g_3(z_{3,k}^\varepsilon)) - f(z_{3,k}^\varepsilon) - 2\tau|^2 \text{Aire}(V_{3,k}^\varepsilon) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{M_{4,\varepsilon}} |f(h_4(z_{4,k}^\varepsilon)) - f(z_{4,k}^\varepsilon)|^2 \text{Aire}(V_{4,k}^\varepsilon),\end{aligned}$$

avec $(\tau, f) \in X$.

Remarque 3.86 Pour $(\tau, f) \in X$ donné, $\mathcal{I}_{\sigma^\varepsilon}(\tau, f)$ est une approximation de $\varphi_\Delta(\tau, f)$ dans le sens suivant : pour tout $\tilde{\varepsilon} > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\left| \varphi_\Delta(\tau, f) - \mathcal{I}_{\sigma^\varepsilon}(\tau, f) \right| < \tilde{\varepsilon}$$

pour tout ε -net σ^ε de Δ . Cette inégalité exprime le fait que l'intégrale donnée par $\varphi_\Delta(\tau, f)$ peut être approchée avec une précision arbitraire par une somme de Riemann $\mathcal{I}_{\sigma^\varepsilon}$ (voir par exemple [Cha97a, Proposition 5.2.14, p. 251] pour le résultat général). Toutefois, pour $(\tau, f) \in X$ et σ^ε donnés, nous ne savons rien de la qualité de cette approximation.

À présent, soient $\{\varepsilon_i\}_{i \geq 1}$ une suite de nombres réels strictement positifs avec $\lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon_i = 0$, $\sigma = \{\sigma^i\}_{i \geq 1}$ où σ^i est un ε_i -net de Δ et $M_{j,i}$ le nombre de points de $\sigma^i \cap \Delta_j$, $j = 1, \dots, 4$. Considérons finalement $\{\{V_{j,k}^i\}_{k=1}^{M_{j,i}}\}_{j=1}^4$ la famille de cellules de Dirichlet-Voronoi dans Δ subordonnée à σ^i , $i \geq 1$.

Remarque 3.87 Nous adaptons la définition du résidu normalisé aux ε_i -nets σ^i :

$$\begin{aligned} RN_{\sigma^i}^2(\tau, f) &= \frac{1}{M_{1,i}} \sum_{k=1}^{M_{1,i}} |f(g_1(z_{1,k}^i)) - f(z_{1,k}^i) - 2|^2 \\ &\quad + \frac{1}{M_{2,i}} \sum_{k=1}^{M_{2,i}} |f(h_2(z_{2,k}^i)) - f(z_{2,k}^i)|^2 \\ &\quad + \frac{1}{M_{3,i}} \sum_{k=1}^{M_{3,i}} |f(g_3(z_{3,k}^i)) - f(z_{3,k}^i) - 2\tau|^2 \\ &\quad + \frac{1}{M_{4,i}} \sum_{k=1}^{M_{4,i}} |f(h_4(z_{4,k}^i)) - f(z_{4,k}^i)|^2, \end{aligned}$$

avec $(\tau, f) \in X$.

Lemme 3.88 Les propriétés suivantes sont vérifiées :

i) Pour tout $(\tau, f) \in X$, nous avons

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{I}_{\sigma^i}(\tau, f) = \varphi_\Delta(\tau, f).$$

ii) Pour tout $i \geq 1$ et tout $j = 1, \dots, 4$, nous avons

$$\frac{\pi}{4} \varepsilon_i^2 < \text{Aire}(V_{j,k}^i) < \pi \varepsilon_i^2,$$

où l'inégalité de gauche est valable pour tout $k = 1, \dots, M_{j,i}$, excepté pour au plus

$$\left\lceil \frac{3}{\sqrt{5 - 2\sqrt{3}} - 1} \frac{\text{Long}(\partial\Delta_j)}{\varepsilon} \right\rceil + 3$$

de ces indices, et l'inégalité de droite est valable pour tout $k = 1, \dots, M_{j,i}$.

iii) Pour tout $(\tau, f) \in X$ et tout $i \geq 1$, nous avons

$$\mathcal{I}_{\sigma^i}(\tau, f) \leq c_{\mathcal{I}} RN_{\sigma^i}^2(\tau, f),$$

où $c_{\mathcal{I}} = 4 \max_{j=1,\dots,4} \left\{ \text{Aire}(\Delta_j) \sup_{i \geq 1} \frac{M_{j,i}}{M_{j,i} - \widetilde{M}_{j,i}} \right\} < \infty$ et $\widetilde{M}_{j,i}$ est le nombre de mauvais points de $\sigma^i \cap \Delta_j$.

Preuve. La propriété i) découle de la Remarque 3.86. La propriété ii) découle de l'Inégalité (3.81). Démontrons la propriété iii). Soient $(\tau, f) \in X$ et $i \geq 1$. Rappelons que, par hypothèse (cf. Remarque 3.74.b), nous avons $M_{j,i} - \widetilde{M}_{j,i} > 0$ pour $j = 1, \dots, 4$. Par la propriété ii) et l'Inégalité (3.77), nous avons successivement

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\sigma^i}(\tau, f) &< \pi \varepsilon_i^2 \left(\sum_{k=1}^{M_{1,i}} |f(g_1(z_{1,k}^i)) - f(z_{1,k}^i) - 2|^2 + \sum_{k=1}^{M_{2,i}} |f(h_2(z_{2,k}^i)) - f(z_{2,k}^i)|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{M_{3,i}} |f(g_3(z_{3,k}^i)) - f(z_{3,k}^i) - 2\tau|^2 + \sum_{k=1}^{M_{4,i}} |f(h_4(z_{4,k}^i)) - f(z_{4,k}^i)|^2 \right), \\ &\leq 4 \text{Aire}(\Delta_1) \frac{M_{1,i}}{M_{1,i} - \widetilde{M}_{1,i}} \cdot \frac{1}{M_{1,i}} \sum_{k=1}^{M_{1,i}} |f(g_1(z_{1,k}^i)) - f(z_{1,k}^i) - 2|^2 \\ &\quad + 4 \text{Aire}(\Delta_2) \frac{M_{2,i}}{M_{2,i} - \widetilde{M}_{2,i}} \cdot \frac{1}{M_{2,i}} \sum_{k=1}^{M_{2,i}} |f(h_2(z_{2,k}^i)) - f(z_{2,k}^i)|^2 \\ &\quad + 4 \text{Aire}(\Delta_3) \frac{M_{3,i}}{M_{3,i} - \widetilde{M}_{3,i}} \cdot \frac{1}{M_{3,i}} \sum_{k=1}^{M_{3,i}} |f(g_3(z_{3,k}^i)) - f(z_{3,k}^i) - 2\tau|^2 \\ &\quad + 4 \text{Aire}(\Delta_4) \frac{M_{4,i}}{M_{4,i} - \widetilde{M}_{4,i}} \cdot \frac{1}{M_{4,i}} \sum_{k=1}^{M_{4,i}} |f(h_4(z_{4,k}^i)) - f(z_{4,k}^i)|^2, \\ &\leq 4 \max_{j=1,\dots,4} \left\{ \text{Aire}(\Delta_j) \sup_{i \geq 1} \frac{M_{j,i}}{M_{j,i} - \widetilde{M}_{j,i}} \right\} \cdot RN_{\sigma^i}(\tau, f). \end{aligned}$$

De l'Inégalité (3.82), il vient $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\widetilde{M}_{j,i}}{M_{j,i}} = 0$. Les suites $\{\frac{M_{j,i}}{M_{j,i} - \widetilde{M}_{j,i}}\}_{i \geq 1}$, $j = 1, \dots, 4$, sont donc convergentes vers 1, et ainsi la constante $c_{\mathcal{I}}$ est bien définie. La propriété iii) est donc démontrée et le lemme s'ensuit. \square

Lemme 3.89 Pour chaque $n \geq 1$, il existe un entier i_n garantissant pour tout $i \geq i_n$ l'existence d'un élément $(\tau_n^{\sigma^i}, p_n^{\sigma^i}) \in \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{imp}^{2n-1}$ qui minimise RN_{σ^i} sur $\mathbb{C} \times \mathcal{P}_{imp}^{2n-1}$.

Preuve. Similaire à la preuve de la Proposition 3.59. \square

Le résultat suivant nous permettra d'obtenir une inégalité cruciale pour la démonstration que la suite $\{(\tau_n^{\sigma^i}, p_n^{\sigma^i})\}_{i \geq i_n}$ est bornée pour tout $n \geq 1$ (Lemme 3.91).

Lemme 3.90 Soit $\nu = \{\{w_{j,k}\}_{k=1}^{M_j}\}_{j=1}^4 \subset \Delta$ un ensemble fini de points. Alors, pour tout $(\tau, f) \in X$, nous avons

$$RN_\nu^2(\tau, f) \leq c_\Delta \varphi_Y(\tau, f),$$

où $c_\Delta = \max_{j=1,\dots,4} (\pi d_{\Delta_j}^2)^{-1}$ et $d_{\Delta_j} > 0$ est la distance euclidienne entre Δ_j et le bord $\partial \tilde{D} = \partial N_{\tilde{\delta}}(\mathcal{O})$.

Preuve. Nous avons successivement

$$\begin{aligned} RN_\nu^2(\tau, f) &\leq \max_k |f(g_1(w_{1,k})) - f(w_{1,k}) - 2|^2 + \max_k |f(h_2(w_{2,k})) - f(w_{2,k})|^2 \\ &\quad + \max_k |f(g_3(w_{3,k})) - f(w_{3,k}) - 2\tau|^2 + \max_k |f(h_4(w_{4,k})) - f(w_{4,k})|^2 \\ &\leq \sup_{w \in \Delta_1} |f(g_1(w)) - f(w) - 2|^2 + \sup_{w \in \Delta_2} |f(h_2(w)) - f(w)|^2 \\ &\quad + \sup_{w \in \Delta_3} |f(g_3(w)) - f(w) - 2\tau|^2 + \sup_{w \in \Delta_4} |f(h_4(w)) - f(w)|^2 \\ &\leq \frac{\|f \circ g_1 - f - 2\|_{\tilde{D}_1^{\min}}^2}{\pi d_{\Delta_1}^2} + \frac{\|f \circ h_2 - f\|_{\tilde{D}_2^{\min}}^2}{\pi d_{\Delta_2}^2} \\ &\quad + \frac{\|f \circ g_3 - f - 2\tau\|_{\tilde{D}_3^{\min}}^2}{\pi d_{\Delta_3}^2} + \frac{\|f \circ h_4 - f\|_{\tilde{D}_4^{\min}}^2}{\pi d_{\Delta_4}^2} \\ &\leq c_\Delta \left(\|f \circ g_1 - f - 2\|_{\tilde{D}_1^{\min}}^2 + \|f \circ h_2 - f\|_{\tilde{D}_2^{\min}}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|f \circ g_3 - f - 2\tau\|_{\tilde{D}_3^{\min}}^2 + \|f \circ h_4 - f\|_{\tilde{D}_4^{\min}}^2 \right) \\ &= c_\Delta \varphi_Y(\tau, f). \end{aligned}$$

L'avant-dernière inégalité vient du Lemme fondamental (Lemme 2.4). Le lemme est ainsi démontré. \square

Lemme 3.91 Pour tout $n \geq 1$, la suite $\{(\tau_n^{\sigma^i}, p_n^{\sigma^i})\}_{i \geq i_n} \subset \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{imp}^{2n-1}$ est bornée.

Preuve. Similaire à la preuve de la Proposition 3.64. L'inégalité clé, similaire à l'Inégalité (3.65), est obtenue ici à l'aide de la constante $C_n = c_\Delta \varphi_Y(\tau_n^Y, p_n^Y)$. En effet, par la minimalité de $(\tau_n^{\sigma^i}, p_n^{\sigma^i})$ et le Lemme 3.90, nous avons

$$RN_{\sigma^i}^2(\tau_n^{\sigma^i}, p_n^{\sigma^i}) \leq RN_{\sigma^i}^2(\tau_n^Y, p_n^Y) \leq c_\Delta \varphi_Y(\tau_n^Y, p_n^Y).$$

D'où le lemme. \square

Nous nous intéressons maintenant, pour $n \geq 1$ fixé, à la question de la convergence de la suite $\{(\tau_n^{\sigma^i}, p_n^{\sigma^i})\}_{i \geq i_n}$. Au contraire des approximations de (τ_{BS}, f_{BS}) issues d'un processus de minimisation sur une famille de subdivisions conformes (cf. Section 3.4), nous ne pouvons pas garantir la convergence des approximations $\{(\tau_n^{\sigma^i}, p_n^{\sigma^i})\}_{i \geq i_n}$ issues, elles, d'un processus

de minimisation *sur une famille d' ε -nets*. Dans le cas d'une famille de subdivisions conformes (sur des arcs ou des domaines), la convergence des approximations repose sur deux éléments (cf. preuve du Lemme 3.69). Le premier est que la suite $\{RN_{\sigma^i}^2\}_{i \geq 1}$ de fonctionnelles sur X converge vers une fonctionnelle continue $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$. Le deuxième est qu'il n'existe qu'un unique élément de $\mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$ qui réalise le minimum de cette fonctionnelle φ sur $\mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$. Dans le cas d'une famille d' ε -nets, en général, la suite $\{RN_{\sigma^i}^2(\tau_n^i, p_n^i)\}_{i \geq i_n}$ n'est que bornée, mais pas nécessairement convergente. Cela peut être expliqué par un phénomène de différence de densité entre des sous-familles d' ε -nets au sein de la famille d' ε -nets. Une illustration de ce phénomène est donnée par une famille «clignotante», par exemple une famille d' ε -nets telle que les ε -nets d'indices impairs sont du type de la figure de gauche de la Figure 3.9 et les ε -nets d'indices pairs sont du type de la figure de droite de la Figure 3.9.

Proposition 3.92 *Pour chaque $n \geq 1$, il existe une sous-suite convergente $\{(\tau_n^{\sigma^{i_k}}, p_n^{\sigma^{i_k}})\}_{k \geq 1}$ vers un élément $(\tau_n^\sigma, p_n^\sigma) \in \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$ telle que, pour tout $k \geq 1$, l'élément $(\tau_n^{\sigma^{i_k}}, p_n^{\sigma^{i_k}})$ minimise la fonctionnelle $\varphi_{\sigma^{i_k}}$ sur $\mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$. De plus, la suite $\{\tau_n^\sigma\}_{n \geq 1}$ converge vers τ_{BS} et, pour tout entier $r \geq 0$, la suite $\{p_n^{\sigma(r)}\}_{n \geq 1}$ converge vers $f_{\text{BS}}^{(r)}$ uniformément localement dans $N_\delta(\mathcal{O})$.*

Preuve. Pour chaque $n \geq 1$, la suite $\{(\tau_n^{\sigma^i}, p_n^{\sigma^i})\}_{i \geq 1}$ étant bornée (Lemme 3.91), elle possède une sous-suite $\{(\tau_n^{\sigma^{i_k}}, p_n^{\sigma^{i_k}})\}_{k \geq 1}$ qui converge vers un élément $(\tau_n^\sigma, p_n^\sigma) \in \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$ (Lemme 3.1). Grâce au Théorème principal (Théorème 3.17) et à son corollaire, il suffit alors de démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_\Delta(\tau_n^\sigma, p_n^\sigma) = 0$$

pour conclure. Pour démontrer cette égalité, pour chaque $n \geq 1$, nous démontrons tout d'abord (Assertion 1)

$$\mathcal{I}_{\sigma^{i_k}}(\tau_n^{\sigma^{i_k}}, p_n^{\sigma^{i_k}}) \leq c_{\mathcal{I}} c_\Delta \varphi_Y(\tau_n^Y, p_n^Y) \quad \text{pour tout } k \geq 1,$$

où (τ_n^Y, p_n^Y) provient de la Proposition 3.16, et ensuite (Assertion 2)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{I}_{\sigma^{i_k}}(\tau_n^{\sigma^{i_k}}, p_n^{\sigma^{i_k}}) = \varphi_\Delta(\tau_n^\sigma, p_n^\sigma).$$

Nous aurons ainsi

$$\varphi_\Delta(\tau_n^\sigma, p_n^\sigma) \leq c_{\mathcal{I}} c_\Delta \varphi_Y(\tau_n^Y, p_n^Y), \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Le fait que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_Y(\tau_n^Y, p_n^Y) = 0$ (cf. preuve du Théorème 3.16) nous permettra alors de conclure.

Démonstration de l'Assertion 1. Soit $k \geq 1$. Le Lemme 3.88.iii), la minimalité de $(\tau_n^{\sigma^{i_k}}, p_n^{\sigma^{i_k}})$ et le Lemme 3.90, nous donne successivement

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\sigma^{i_k}}(\tau_n^{\sigma^{i_k}}, p_n^{\sigma^{i_k}}) &\leq c_{\mathcal{I}} RN_{\sigma^{i_k}}^2(\tau_n^{\sigma^{i_k}}, p_n^{\sigma^{i_k}}) \\ &\leq c_{\mathcal{I}} RN_{\sigma^{i_k}}^2(\tau_n^Y, p_n^Y) \\ &\leq c_{\mathcal{I}} c_\Delta \varphi_Y(\tau_n^Y, p_n^Y). \end{aligned}$$

Démonstration de l'Assertion 2. D'une part, le Lemme 3.88.i) et la continuité des fonctionnelles \mathcal{I}_{σ^i} nous donnent

$$\varphi_{\Delta}(\tau_n^{\sigma}, p_n^{\sigma}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{I}_{\sigma^{i_k}}(\tau_n^{\sigma}, p_n^{\sigma}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \mathcal{I}_{\sigma^{i_k}}(\tau_n^{\sigma^{i_l}}, p_n^{\sigma^{i_l}}).$$

D'autre part, la continuité de φ_{Δ} et le Lemme 3.88.i) nous donnent

$$\varphi_{\Delta}(\tau_n^{\sigma}, p_n^{\sigma}) = \lim_{l \rightarrow \infty} \varphi_{\Delta}(\tau_n^{\sigma^{i_l}}, p_n^{\sigma^{i_l}}) = \lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{I}_{\sigma^{i_k}}(\tau_n^{\sigma^{i_l}}, p_n^{\sigma^{i_l}}).$$

Ainsi, la deuxième assertion est démontrée et la proposition s'ensuit. \square

Remarque 3.93 L'utilisation d'une famille de subdivisions conformes de Δ , obtenue par exemple comme l'image conforme d'une famille de subdivisions euclidiennes régulières du carré $]0, 1[+ i]0, 1[$, mène à une version similaire du Théorème 3.71. Réciproquement, l'utilisation à la Section 3.4 d'une famille d' ε -nets pour les arcs de courbes au lieu d'une famille de subdivisions conformes mène à une version similaire de la Proposition 3.92.

Chapitre 4

Généralisation de la méthode d'uniformisation de Buser-Silhol

Dans ce chapitre, nous généralisons aux surfaces de Riemann hyperelliptiques de genre ≥ 3 , la méthode d'uniformisation conforme des surfaces de Riemann compactes de genre 2 développée par P. Buser et R. Silhol dans [BS05b]. Dans la Section 4.1, nous généralisons les définitions et les résultats introduits à la Section 1.3, et dans la Section 4.2, nous donnons une uniformisation numérique pour deux surfaces de Riemann hyperelliptiques de genre 3.

4.1 Généralisation des définitions et résultats

Un $4n$ -gone géodésique hyperbolique $\mathcal{P} \subset \mathbb{D}$ est dit *admissible* pour la méthode d'uniformisation de Buser-Silhol si :

- i) il est non dégénéré (*i.e.* ses angles internes sont tous strictement positifs),
- ii) la somme de ses angles internes vaut 2π ,
- iii) il admet une symétrie centrale par rapport à l'origine $0 \in \mathbb{D}$,
- iv) deux de ses côtés opposés ont leur milieu hyperbolique sur le segment $] -1, 1[\subset \mathbb{D}$.

Le groupe G engendré par des isométries hyperboliques g_1, \dots, g_{2n} identifiant chacune deux côtés opposés de \mathcal{P} est appelé *groupe d'isométries associé* à \mathcal{P} .

Soient \mathcal{P} un $4n$ -gone admissible et G son groupe d'isométries associé.

Nous notons consécutivement dans le sens trigonométrique positif m_1, \dots, m_{4n} les milieux hyperboliques des côtés de \mathcal{P} , en commençant par $m_1 \in]0, 1[$, ainsi que s_1, \dots, s_{4n} les sommets de \mathcal{P} , en commençant par s_1 le sommet compris entre m_1 et m_2 le long du bord de \mathcal{P} . Afin que la notation des isométries hyperboliques g_1, \dots, g_{2n} soit uniquement déterminée, nous les définissons de sorte que $g_i(m_{i+2n}) = m_i$, $i = 1, \dots, 2n$. La situation est illustrée par la Figure 4.1. Notons que tous les éléments du groupe G sont hyperboliques et que les flèches de la Figure 4.1 sont portées par les axes des générateurs g_1, \dots, g_{2n} .

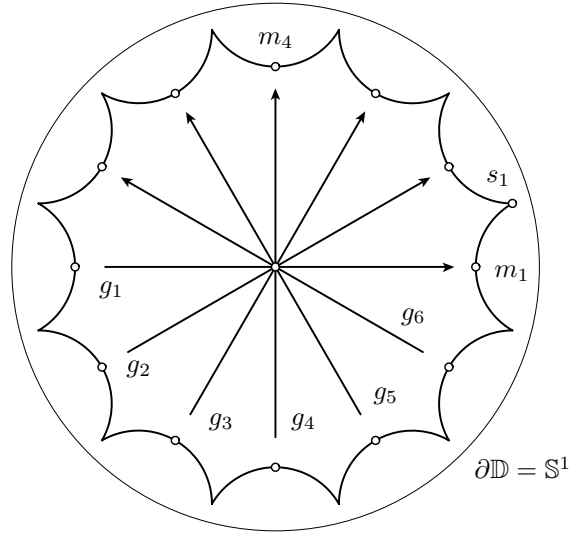


FIGURE 4.1. $4n$ -gone admissible $\mathcal{P} \subset \mathbb{D}$ ($n = 3$) et générateurs g_1, \dots, g_{2n} de son groupe d'isométries associé G .

Lemme 4.1

- a) Soit S une surface de Riemann hyperelliptique de genre $n \geq 2$. Alors il existe un $4n$ -gone admissible \mathcal{P} tel que S soit conformément équivalente à \mathbb{D}/G où G est le groupe d'isométries associé à \mathcal{P} .
- b) Soit \mathcal{P} un $4n$ -gone admissible ($n \geq 2$) et G son groupe d'isométries associé. Alors \mathcal{P} est un domaine fondamental pour l'action de G sur \mathbb{D} et \mathbb{D}/G est une surface hyperbolique hyperelliptique de genre $n \geq 2$.

Preuve. Le point a) est un résultat classique qui remonte à Robert Fricke et Felix Klein (cf. [FK65]). Le point b) découle du Théorème du polyèdre de Poincaré (voir par exemple [Bea95, Théorème, 9.8.4]) et du fait que l'hyperellipticité de la surface hyperbolique fermée \mathbb{D}/G vient de l'invariance de \mathcal{P} , et de son schéma d'identification, par rapport à la multiplication par -1 dans \mathbb{D} . Une démonstration alternative de ce lemme est donnée dans l'article de A. Costa et A. Porto [CP04, Theorem 2.4]. \square

Remarque 4.2 Soit \mathcal{P} un $4n$ -gone admissible et G son groupe d'isométries associé. La multiplication par -1 dans \mathbb{D} est un relèvement de l'involution hyperelliptique $\varphi_h : \mathbb{D}/G \rightarrow \mathbb{D}/G$. Autrement dit, nous avons le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \xrightarrow{\cdot(-1)} & \mathbb{D} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{D}/G & \xrightarrow{\varphi_h} & \mathbb{D}/G \end{array}$$

Soient \mathcal{P} un $4n$ -gone admissible, G son groupe d'isométries associé et $h_i : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ le demi-tour autour de 0, pour $i = 0$, et autour du point milieu m_i , pour $i = 1, \dots, 4n$. Fixons, jusqu'à

la fin de cette section, $k_\tau \in \{2, 3, \dots, 2n\}$ et posons $g_\tau = g_{k_\tau}$. Soit finalement G' le groupe engendré par les éléments g_1, g_τ et $h_i, i \in I' = \{1, \dots, 4n\} \setminus \{1, k_\tau, 2n+1, 2n+k_\tau\}$. Le groupe G' est appelé *groupe auxiliaire d'isométries* de \mathcal{P} . La situation est illustrée par la Figure 4.2.

Un fait crucial dans la méthode d'uniformisation de Buser-Silhol est que non seulement le $4n$ -gone \mathcal{P} est un domaine fondamental pour l'action de G sur \mathbb{D} , mais que c'est aussi un domaine fondamental pour l'action de G' sur \mathbb{D} . Nous définissons la surface de Riemann compacte $S' = \mathbb{D}/G'$. La caractéristique d'Euler de S' , calculée via une triangulation du $4n$ -gone donné, vaut 0. Autrement dit, S' est de genre 1.

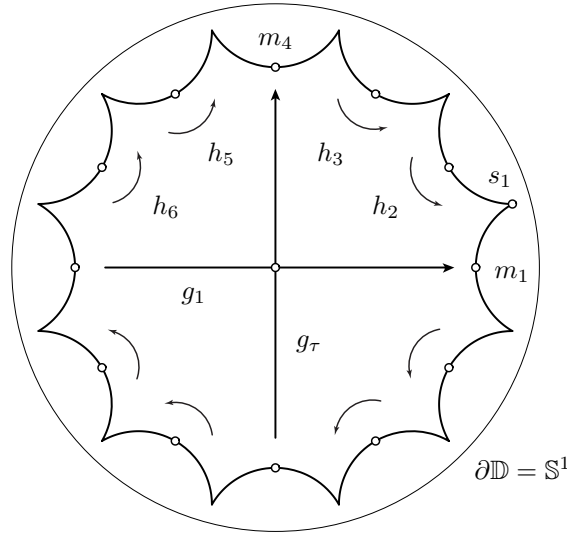


FIGURE 4.2. $4n$ -gone admissible $\mathcal{P} \subset \mathbb{D}$ et générateurs $g_1, g_\tau, h_i, i \in I'$, de son groupe auxiliaire d'isométries G' ($n = 3, k_\tau = 4$).

Remarque 4.3

- a) Les générateurs $g_i, i = 1, \dots, 2n$, peuvent s'exprimer comme $g_i = h_i h_0 = h_0 h_{2n+i}$.
- b) Les sommets s_1, s_2, \dots, s_{4n} d'un $4n$ -gone admissible sont des représentants de la même classe d'équivalence, tant dans \mathbb{D}/G que dans \mathbb{D}/G' .

Définition 4.4 Soient \mathcal{P} un $4n$ -gone admissible ($n \geq 2$), G son groupe d'isométries associé et G' son groupe auxiliaire d'isométries. Le triplet (\mathcal{P}, G, G') est appelé une *donnée pour l'uniformisation à la Buser-Silhol de la surface hyperelliptique* $S = \mathbb{D}/G$.

Théorème 4.5 Soit (\mathcal{P}, G, G') une donnée pour l'uniformisation à la Buser-Silhol d'une surface hyperelliptique de genre $n \geq 2$. Alors il existe un unique $\tau_{BS} \in \mathbb{H}$ et une unique fonction holomorphe $f_{BS} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ tels que :

- i) $f_{BS} \circ g_1 = f_{BS} + 2$ sur \mathbb{D} ,
- ii) $f_{BS} \circ g_\tau = f_{BS} + 2\tau_{BS}$ sur \mathbb{D} ,
- iii) $f_{BS} \circ h_i = f_{BS}$ sur $\mathbb{D}, i \in I'$,
- iv) $f_{BS}(0) = 0$.

De plus, f_{BS} est impaire, et conforme sur \mathbb{D} , sauf sur les G -orbites (ou G' -orbites) des points m_i , $i \in I'$, et $f_{\text{BS}} - f_{\text{BS}}(m_i)$ est exactement d'ordre 2 aux points m_i , $i \in I'$.

Les relations $i) - iii)$ du théorème sont appelées les *relations de périodicité* de (\mathcal{P}, G, G') (ou de f_{BS}).

Preuve. Nous reprenons essentiellement les arguments de la preuve de [BS05b, Lemma 1.1], en les détaillant toutefois quelque peu. Puisque que $S' = \mathbb{D}/G'$ est une surface de Riemann compacte de genre 1, il existe $\tau_{\text{BS}} \in \mathbb{H}$ et une application biholomorphe $\iota : \mathbb{D}/G' \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda_{\tau_{\text{BS}}}$, où $\Lambda_{\tau_{\text{BS}}}$ est le réseau engendré par 2 et $2\tau_{\text{BS}}$, tels que l'image de $[-1, 1] \subset \mathbb{C}$ (resp. $[-\tau_{\text{BS}}, \tau_{\text{BS}}] \subset \mathbb{C}$) par la projection canonique (revêtement universel) $\pi_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda_{\tau_{\text{BS}}}$ soit dans la même classe d'homologie de $\mathbb{C}/\Lambda_{\tau_{\text{BS}}}$ que l'image par $\iota \circ \pi_1$ du segment hyperbolique $[m_{2n+1}, m_1]_h \subset \mathbb{D}$ porté par l'axe de l'isométrie g_1 (resp. $[m_{2n+k_\tau}, m_{k_\tau}]_h \subset \mathbb{D}$ porté par l'axe de l'isométrie g_τ), avec $\pi_1 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}/G'$ est la projection canonique. L'application biholomorphe ι est déterminée de manière unique en imposant la condition additionnelle

$$\iota(\pi_1([m_{2n+1}, m_1]_h \cap [m_{2n+k}, m_k]_h)) = \pi_2([-1, 1] \cap [-\tau_{\text{BS}}, \tau_{\text{BS}}]),$$

i.e. $\iota(\pi_1(0)) = \pi_2(0) \in \mathbb{C}/\Lambda_{\tau_{\text{BS}}}$. En notant

$$a = \pi_1([m_{2n+1}, m_1]_h), \quad b = \pi_1([m_{2n+k_\tau}, m_{k_\tau}]_h),$$

nous avons alors les égalités suivantes dans $H_1(\mathbb{C}/\Lambda_{\tau_{\text{BS}}}, \mathbb{Z})$

$$[\iota(a)] = [\pi_2([-1, 1])], \quad [\iota(b)] = [\pi_2([- \tau_{\text{BS}}, \tau_{\text{BS}}])]. \quad (4.6)$$

Définition de la fonction holomorphe f_{BS} . Soit $f_{\text{BS}} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ le relèvement de $\iota \circ \pi_1$ dans \mathbb{C} , vérifiant $f_{\text{BS}}(0) = 0$. La situation est résumée dans le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \mathbb{C} \\ & & & \nearrow f_{\text{BS}} & \downarrow \pi_2 \\ \mathbb{D} & \xrightarrow{\pi_1} & \mathbb{D}/G' & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{C}/\Lambda_{\tau_{\text{BS}}} \end{array}$$

Autrement dit, nous avons $\pi_2 \circ f_{\text{BS}} = \iota \circ \pi_1$. Puisque π_2 est localement biholomorphe, la fonction f_{BS} est égale à la composition de fonctions holomorphes, définie localement, $\pi_2^{-1} \circ \iota \circ \pi_1$. Par suite, f_{BS} est holomorphe.

La fonction f_{BS} est impaire. La multiplication par -1 dans \mathbb{D} induit, via $\iota \circ \pi_1$, une involution φ sur $\mathbb{C}/\Lambda_{\tau_{\text{BS}}}$. Autrement dit,

$$(\iota \circ \pi_1) \circ h_0 = \varphi \circ (\iota \circ \pi_1) \quad \text{sur } \mathbb{D}.$$

Nous obtenons alors, premièrement,

$$(\pi_2 \circ f_{\text{BS}}) \circ h_0 = (\iota \circ \pi_1) \circ h_0 = \varphi \circ (\iota \circ \pi_1) \quad \text{sur } \mathbb{D}.$$

Puisque le point $\iota(\pi_1(0)) = \pi_2(0) \in \mathbb{C}/\Lambda_{\tau_{\text{BS}}}$ est fixé par cette involution φ , elle est aussi induite par la multiplication par -1 dans \mathbb{C} . Autrement dit,

$$\pi_2 \circ h_0 = \varphi \circ \pi_2 \quad \text{sur } \mathbb{C}.$$

Deuxièmement, puisque par construction $\pi_2 \circ f_{\text{BS}} = \iota \circ \pi_1$, nous avons

$$(\pi_2 \circ h_0) \circ f_{\text{BS}} = \varphi \circ \pi_2 \circ f_{\text{BS}} = \varphi \circ (\iota \circ \pi_1) \quad \text{sur } \mathbb{D}.$$

D'où l'égalité

$$\pi_2 \circ f_{\text{BS}} \circ h_0 = \pi_2 \circ h_0 \circ f_{\text{BS}} \quad \text{sur } \mathbb{D}.$$

Or, π_2 étant localement biholomorphe, nous obtenons $f_{\text{BS}} \circ h_0 = h_0 \circ f_{\text{BS}}$ au voisinage de $0 \in \mathbb{D}$. Par le Principe d'identité des fonctions holomorphes, $f_{\text{BS}} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est donc une fonction impaire.

La fonction f_{BS} est (souvent) conforme. D'une part, π_2 est localement biholomorphe. D'autre part, $\iota \circ \pi_1$ est localement biholomorphe sauf sur les G' -orbites des points m_i , $i \in I'$, points en lesquels elle est ramifiée d'indice 2. Ainsi, $f_{\text{BS}} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est conforme sur \mathbb{D} , sauf sur les G' -orbites des points m_i , $i \in I'$, et la fonction $f_{\text{BS}} - f_{\text{BS}}(m_i)$ est d'ordre 2 en m_i .

Relations de périodicités de la fonction f_{BS} . Par construction de f_{BS} , il existe, pour tout $g \in \{g_1, g_\tau\} \cup_{i \in I'} h_i$, un élément $\lambda_g \in \Lambda_{\tau_{\text{BS}}}$ tel que $f_{\text{BS}} \circ g = f_{\text{BS}} + \lambda_g$. Autrement dit, la différentielle df_{BS} est G' -équivariante sur \mathbb{D} . Par suite, $(\pi_1^{-1})^* df_{\text{BS}}$ est une forme différentielle holomorphe sur $S' = \mathbb{D}/G'$. Par ailleurs, la différentielle dz est $\Lambda_{\tau_{\text{BS}}}$ -équivariante sur \mathbb{C} , et ainsi $(\pi_2^{-1})^* dz$ est une forme différentielle holomorphe sur $\mathbb{C}/\Lambda_{\tau_{\text{BS}}}$. Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} \lambda_{g_1} &= f_{\text{BS}}(g_1(m_{2n+1})) - f_{\text{BS}}(m_{2n+1}) \\ &= \int_{[m_{2n+1}, m_1]_h} df_{\text{BS}} && (g_1(m_{2n+1}) = m_1) \\ &= \int_{[m_{2n+1}, m_1]_h} f_{\text{BS}}^* dz \\ &= \int_{f_{\text{BS}}([m_{2n+1}, m_1]_h)} dz \\ &= \int_{\pi_2 \circ f_{\text{BS}}([m_{2n+1}, m_1]_h)} (\pi_2^{-1})^* dz \\ &= \int_{\iota \circ \pi_1([m_{2n+1}, m_1]_h)} (\pi_2^{-1})^* dz && (\text{grâce à } \pi_2 \circ f_{\text{BS}} = \iota \circ \pi_1) \\ &= \int_{\pi_2([-1, 1])} (\pi_2^{-1})^* dz && (\text{grâce à (4.6)}) \\ &= \int_{[-1, 1]} dz \\ &= 2. \end{aligned}$$

Avec les mêmes arguments que ci-dessus, nous obtenons

$$\lambda_{g_\tau} = f_{\text{BS}}(g_\tau(m_{2n+k_\tau+1})) - f_{\text{BS}}(m_{2n+k_\tau+1}) = \int_{[-\tau_{\text{BS}}, \tau_{\text{BS}}]} dz = 2\tau_{\text{BS}}.$$

Finalement, soient $i \in I'$ et $c_i \subset \overline{\mathcal{P}}$ une courbe dont seules les extrémités, notées $c_{i0}, c_{i1} = h_i(c_{i0})$, appartiennent à $\partial\mathcal{P}$. Par conséquent, $\pi_1(c_i)$ est une courbe fermée de \mathbb{D}/G' , homologue à zéro. Il vient alors

$$\lambda_{h_i} = \int_{c_i} df_{\text{BS}} = \int_{\pi_1(c_i)} (\pi_1^{-1})^* df_{\text{BS}} = \int_{[0]} (\pi_1^{-1})^* df_{\text{BS}} = 0, \quad i \in I'.$$

Les relations de périodicité sont ainsi vérifiées, et le théorème est démontré. \square

Définition 4.7 Le quintuplet $(\mathcal{P}, G, G'; f_{\text{BS}}, \tau_{\text{BS}})$ est appelé une *uniformisation à la Buser-Silhol de la surface hyperelliptique \mathbb{D}/G* .

Remarque 4.8 Soit $(\mathcal{P}, G, G'; f_{\text{BS}}, \tau_{\text{BS}})$ une uniformisation à la Buser-Silhol d'une surface hyperelliptique de genre ≥ 2 . Du Théorème 4.5 et de sa preuve découlent les remarques suivantes.

- 1) La fonction f_{BS} n'est pas un polynôme. En effet, pour tout $i, j \in I'$ avec $i \neq j$, l'ensemble $\{(h_j \circ h_i)^r(0) \mid r \in \mathbb{Z}\}$ admet une infinité d'éléments distincts, chacun annulant f_{BS} . Si la fonction f_{BS} était un polynôme, elle devrait donc être identiquement nulle.
- 2) La fonction f_{BS} vérifie

$$f_{\text{BS}}(0) = 0, \quad f_{\text{BS}}(m_1) = 1, \quad f_{\text{BS}}(s_1) = 1 + \tau_{\text{BS}} \quad \text{et} \quad f_{\text{BS}}(m_{k_\tau}) = \tau_{\text{BS}}.$$

- 3) Les $2n+2$ points de Weierstrass de \mathbb{D}/G (points fixés par l'involution hyperelliptique) sont

$$\pi(0), \pi(s_j), \pi(m_i), i \in I',$$

où $\pi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}/G$ est la projection canonique.

Proposition 4.9 Soit $(\mathcal{P}, G, G'; f_{\text{BS}}, \tau_{\text{BS}})$ une uniformisation à la Buser-Silhol d'une surface hyperelliptique de genre $n \geq 2$. Considérons une fonction holomorphe \tilde{f} définie sur un voisinage ouvert D de l'adhérence du $4n$ -gone \mathcal{P} . S'il existe $\tilde{\tau} \in \mathbb{C}$ tel que les conditions suivantes sont vérifiées :

- i) $\tilde{f} \circ g_1 = \tilde{f} + 2$ sur l'arc géodésique $[s_{2n}, s_{2n+1}]_h$,
- ii) $\tilde{f} \circ g_\tau = \tilde{f} + 2\tilde{\tau}$ sur l'arc géodésique $[s_{2n+k_\tau}, s_{2n+k_\tau+1}]_h$,
- iii) $\tilde{f} \circ h_i = \tilde{f}$ sur l'arc géodésique $[s_{i-1}, s_i]_h$, pour tout $i \in I'$,
- iv) $\tilde{f}(0) = 0$,

alors $\tilde{f} = f_{\text{BS}}|_D$ et $\tilde{\tau} = \tau_{\text{BS}}$. En particulier, \tilde{f} est impaire.

Preuve. Nous donnons une preuve alternative à celle de [BS05b, Lemma 1.2] à l'aide de la théorie des formes différentielles sur une surface de Riemann compacte. Au vu des Relations de périodicité i) – iii) satisfaites par \tilde{f} , la différentielle $d\tilde{f}$ est G' -équivariante et par suite, $(\pi_1^{-1})^* d\tilde{f}$ est une forme différentielle holomorphe sur $S' = \mathbb{D}/G'$. Or, la dimension de l'espace de Hilbert complexe \mathcal{H} , constitué des formes différentielles holomorphes sur S' , est égale au

genre de S' ([FK92, Proposition III.2.7.]), *i.e.* 1 ici. Donc, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $d\tilde{f} = \lambda df_{\text{BS}}$. Puisque sur la courbe fermée $a = \pi_1([m_{2n+1}, m_1]_h)$, nous avons

$$\begin{aligned} \int_a (\pi_1^{-1})^* d\tilde{f} &= \int_{[m_{2n+1}, m_1]_h} d\tilde{f} = \tilde{f}(g_1(m_{2n+1})) - \tilde{f}(m_{2n+1}) = 2, \\ \int_a (\pi_1^{-1})^* df_{\text{BS}} &= \int_{[m_{2n+1}, m_1]_h} df_{\text{BS}} = f_{\text{BS}}(g_1(m_{2n+1})) - f_{\text{BS}}(m_{2n+1}) = 2, \end{aligned}$$

et il vient $\lambda = 1$. Autrement dit, $d\tilde{f} = df_{\text{BS}}$. Or, $\tilde{f}(0) = 0 = f_{\text{BS}}(0)$, ce qui implique que $\tilde{f} = f_{\text{BS}}|_D$. Le Théorème 4.5 permet alors de conclure que $\tilde{\tau} = \tau_{\text{BS}}$. Notons encore tout de même que

$$\begin{aligned} \int_b (\pi_1^{-1})^* d\tilde{f} &= \int_{[m_{2n+k_\tau+1}, m_{k_\tau+1}]_h} d\tilde{f} = \tilde{f}(g_\tau(m_{2n+k_\tau+1})) - \tilde{f}(m_{2n+k_\tau+1}) = 2\tilde{\tau}, \\ \int_b (\pi_1^{-1})^* df_{\text{BS}} &= \int_{[m_{2n+k_\tau+1}, m_{k_\tau+1}]_h} df_{\text{BS}} = f_{\text{BS}}(g_\tau(m_{2n+k_\tau+1})) - f_{\text{BS}}(m_{2n+k_\tau+1}) = 2\tau_{\text{BS}}, \end{aligned}$$

où $b = \pi_1([m_{2n+k_\tau+1}, m_{k_\tau+1}]_h)$. D'où le théorème. \square

Remarque 4.10

- a) Au lieu des $4n - 4 = |I'|$ égalités $\tilde{f} \circ h_i = \tilde{f}$ requises dans la condition *iii*) de la Proposition 4.9, il est équivalent de n'en exiger que $2n - 2$, qui sont deux à deux non conjuguées par h_0 , et d'exiger que \tilde{f} soit impaire.
- b) Nous avons encore une preuve alternative de la Proposition 4.9. Cette preuve utilise le résultat suivant qui décrit la forme très particulière du relèvement dans \mathbb{C} d'une application holomorphe entre deux tores conformes (voir [Mir95, Proposition 1.11, p. 63]) : *Soient $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset \mathbb{C}$ deux réseaux. Alors, toute application holomorphe $\nu : \mathbb{C}/\Lambda_1 \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda_2$ entre les tores associés aux deux réseaux est induite par une application $\mu : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de la forme $\mu(z) = \alpha z + \beta$, $z \in \mathbb{C}$, où α est une constante telle que $\alpha\Lambda_1 \subset \Lambda_2$. De plus, la constante β peut être prise égale à zéro si et seulement si $\nu(0) = 0$. Dans ce cas, ν est un homomorphisme de groupe.*

Avant d'énoncer la généralisation du résultat de P. Buser et R. Silhol (Théorème 4.11) qui décrit un polynôme dont la courbe algébrique associée est conformétement équivalente à la surface de Riemann hyperelliptique de genre $n \geq 2$ associée à un $4n$ -gone admissible donné, nous rappelons encore quelques définitions nécessaires. Pour $(\mathcal{P}, G, G'; f_{\text{BS}}, \tau_{\text{BS}})$ donnée, $\Lambda_{\tau_{\text{BS}}} \subset \mathbb{C}$ est le réseau euclidien engendré par 2 et $2\tau_{\text{BS}}$, et $T_{\tau_{\text{BS}}} : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ est la fonction méromorphe paire $\Lambda_{\tau_{\text{BS}}}$ -périodique définie par

$$T_{\tau_{\text{BS}}}(z) = -\frac{w}{K} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{(w - \zeta^{2k})^2 (1 - \zeta^{2k+2} w)^2}{(w - \zeta^{2k+1})^2 (1 - \zeta^{2k+1} w)^2}, \quad z \in \mathbb{C},$$

où $\zeta = \exp(\pi i \tau_{\text{BS}})$, $w = \exp(\pi i z)$ et $K = 4 \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(1+\zeta)^{2k}}{(1+\zeta)^{2k-1}} \right)^4$. Rappelons aussi que cette fonction est normalisée de sorte que $T_{\tau_{\text{BS}}}(0) = 0$, $T_{\tau_{\text{BS}}}(1) = 1$ et $T_{\tau_{\text{BS}}}(\tau_{\text{BS}}) = \infty$.

Théorème 4.11 Soient $(\mathcal{P}, G, G'; f_{\text{BS}}, \tau_{\text{BS}})$ une uniformisation à la Buser-Silhol d'une surface hyperelliptique de genre $n \geq 2$ et $F_{\text{BS}} : \mathbb{D} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ la fonction méromorphe définie par $F_{\text{BS}} = T_{\tau_{\text{BS}}} \circ f_{\text{BS}}$. Alors :

- i) F_{BS} est G -équivariante.
- ii) La surface de Riemann \mathbb{D}/G est conformément équivalente à la courbe algébrique \mathcal{C}_A associée au polynôme $A \in \mathbb{C}[x, y]$ défini par

$$A(x, y) = y^2 - x(x-1)(x-a_1) \prod_{i \in I''} (x-a_i)$$

où $a_1 = F_{\text{BS}}(s_j)$, $a_i = F_{\text{BS}}(m_i)$, $i \in I'' = \{2, 3, \dots, 2n\} \setminus \{k_\tau\}$.

- iii) L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &\longrightarrow \mathcal{C}_A \\ z &\longmapsto (x(z), y(z)), \end{aligned}$$

où les fonctions méromorphes G -équivariantes $x, y : \mathbb{D} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ sont définies par

$$\begin{aligned} x(z) &= F_{\text{BS}}(z), \\ y(z) &= \sqrt{F_{\text{BS}}(z)(F_{\text{BS}}(z)-1)(F_{\text{BS}}(z)-a_1) \prod_{i \in I''} (F_{\text{BS}}(z)-a_i)}, \end{aligned}$$

est une paramétrisation uniforme de la courbe algébrique \mathcal{C}_A .

Preuve. Nous reprenons essentiellement les arguments de la preuve de [BS05b, Proposition 1.4], en les détaillant toutefois quelque peu.

Point i). Par construction, F_{BS} est paire et G' -équivariante et donc, en particulier, $F_{\text{BS}} \circ g_1 = F_{\text{BS}}$ et $F_{\text{BS}} \circ g_\tau = F_{\text{BS}}$. Rappelons que, pour tout $i = 1, \dots, 2n$, nous avons $g_i = h_i h_0 = h_0 h_{2n+i}$. Ainsi, pour tout $i \in I'$, nous avons

$$F_{\text{BS}} g_i = F_{\text{BS}} h_0 h_{2n+i} = F_{\text{BS}} h_{2n+i} = F_{\text{BS}}.$$

Par conséquent, F_{BS} est G -équivariante.

Point ii). Rappelons que

$$f_{\text{BS}}(0) = 0, \quad f_{\text{BS}}(m_1) = 1, \quad f_{\text{BS}}(s_1) = 1 + \tau_{\text{BS}}, \quad f_{\text{BS}}(m_{k_\tau}) = \tau_{\text{BS}}.$$

À présent, remarquons que F_{BS} est précisément ramifiée au-dessus des points $\infty, 0, 1, a_1$ (les points de ramification de $T_{\tau_{\text{BS}}}$) et a_i , $i \in \{2, 3, \dots, 2n\} \setminus \{k_\tau\}$ (les points de ramification induits par f_{BS}). Puisque qu'elle est G' -équivariante, la fonction $F_{\text{BS}} : \mathbb{D} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ est un relèvement de la projection hyperelliptique $\pi_h : \mathbb{D}/G \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. Autrement dit, $F_{\text{BS}} = \pi_h \circ \pi$ et nous avons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \xrightarrow{f_{\text{BS}}} & \mathbb{C} \\ \pi \downarrow & \searrow F_{\text{BS}} & \downarrow T_{\tau_{\text{BS}}} \\ \mathbb{D}/G & \xrightarrow{\pi_h} & \widehat{\mathbb{C}} \end{array}$$

Par conséquent, la surface de Riemann \mathbb{D}/G est conformément équivalente à la courbe algébrique \mathcal{C}_A associée au polynôme $A \in \mathbb{C}[x, y]$ de l'énoncé.

Point iii). Une paramétrisation uniforme de la courbe algébrique \mathcal{C}_A s'obtient comme suit. Nous cherchons une application

$$\begin{aligned}\mathbb{D} &\longrightarrow \mathcal{C}_A \\ z &\longmapsto (x(z), y(z)).\end{aligned}$$

Pour la coordonnée x , nous prenons la fonction méromorphe G -équivariante $x : \mathbb{D} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ définie par $x = F_{\text{BS}}$. Pour la coordonnée y , nous considérons préalablement la fonction $P_S : \mathbb{D} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ définie par

$$P_S(z) = F_{\text{BS}}(z)(F_{\text{BS}}(z) - 1)(F_{\text{BS}}(z) - a_1) \prod_{i \in I''} (F_{\text{BS}}(z) - a_i), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Par constuction, P_S est une fonction méromorphe, G -équivariante et paire. Considérons les ensembles

$$\begin{aligned}E_0 &= G0 \cup Gm_1 \cup Gs_j \cup \bigcup_{i \in I''} Gm_i, \\ E_\infty &= Gm_{k_\tau}, \\ E &= E_0 \cup E_\infty,\end{aligned}$$

où Gz est la G -orbite de $z \in \mathbb{D}$. Par construction de P_S , chaque $z \in E_0$ est un zéro de P_S d'ordre 2 et ainsi, chaque $z \in E_\infty$ est un pôle d'ordre $2 \cdot (3 + |I''|) = 4n + 2$. Par conséquent, une racine carrée de P_S peut être localement définie sur $\mathbb{D} \setminus E$. Puisque P_S est paire, la continuation analytique d'une détermination locale d'une racine carrée de P_S le long d'un chemin quelconque dans $\mathbb{D} \setminus E$ mène à une fonction holomorphe *univaluée* dans un voisinage de ce chemin. Ceci est en particulier valable pour les chemins non homotopes à zéro dans $\mathbb{D} \setminus E$. Nous pouvons ainsi définir une fonction racine carrée de P_S , notée $\sqrt{P_S}$, qui est univaluée et holomorphe sur $\mathbb{D} \setminus E$. Par construction de P_S , la fonction $\sqrt{P_S}$ s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbb{D} \setminus E_0$ dont les pôles, à savoir les éléments de E_∞ , sont tous d'ordre $2n + 1$. De plus, cette fonction $\sqrt{P_S}$ étant bornée sur tout voisinage pointé $V'_z = V_z \setminus \{z\}$ de $z \in E_0$, avec $V_z \subset \mathbb{D}$ un voisinage ouvert suffisamment petit (p. ex. tel que $\overline{V_z} \cap E = \{z\}$), elle se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{D} \setminus E_\infty$, en posant $\sqrt{P_S}|_{E_0} = 0$ (Critère de la singularité artificielle). Nous obtenons ainsi une fonction racine carrée définie, méromorphe et G -équivariante sur \mathbb{D} . Finalement, pour la coordonnée y de la paramétrisation uniforme de \mathcal{C}_A , nous prenons la fonction méromorphe G -équivariante $y : \mathbb{D} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ définie par $y = \sqrt{P_S}$. Le théorème est ainsi démontré. \square

4.2 Exemples d'uniformisation numérique en genre 3

Dans cette section, nous présentons deux exemples numériques dont l'uniformisation conforme est connue.

Étant donnée une uniformisation à la Buser-Silhol $(\mathcal{P}, G, G'; \tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$ de la surface hyperelliptique de genre trois \mathbb{D}/G , nous calculons une approximation (τ_n^M, p_n^M) de $(\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$, avec $\tau_n^M \in \mathbb{C}$ et $p_n^M \in \mathcal{P}_{\text{imp}}^{2n-1}$, ainsi que des approximations $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \tilde{a}_4, \tilde{a}_5 \in \mathbb{C}$ des coefficients a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 du polynôme

$$A(x, y) = y^2 - x(x-1)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5),$$

de sorte que la courbe algébrique associée \mathcal{C}_A soit conformément équivalente à \mathbb{D}/G . Rappelons que les coefficients a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 appartiennent à $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$ et sont deux à deux distincts.

Les approximations numériques ci-dessous sont basées sur $6M = 600$ points et $n = 200$ fonctions de base.

Exemple 1

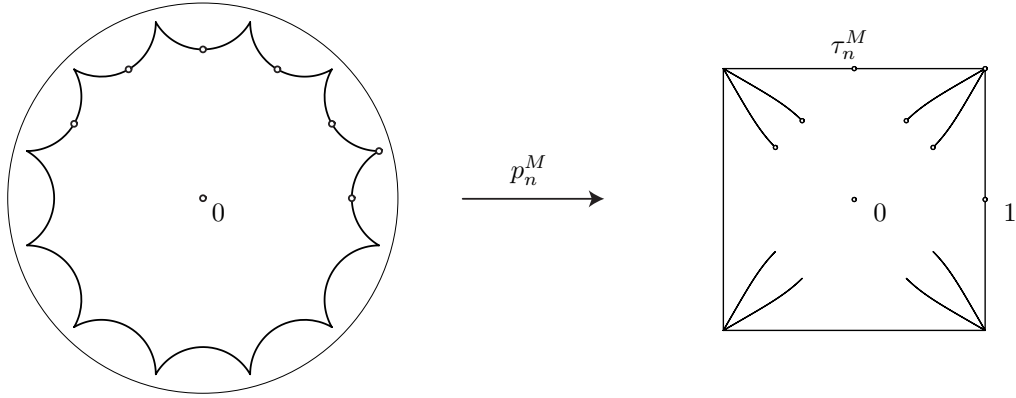
Nous considérons l'uniformisation $(\mathcal{P}_1, G_1, G'_1; \tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$ de la surface hyperelliptique de genre trois \mathbb{D}/G_1 lorsque le polygone admissible \mathcal{P}_1 est le dodécagone régulier et que les deux éléments hyperboliques entrant dans la définition du groupe auxiliaire d'isométries G'_1 sont $g_1, g_\tau = g_4$. Il est alors connu que

$$\begin{aligned} \tau_{\text{BS}} &= i, \\ a_1 &= 2, \\ a_2 &= 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}i, \\ a_3 &= 1 + \sqrt{3}i, \\ a_4 &= 1 - \sqrt{3}i, \\ a_5 &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}i. \end{aligned}$$

Le polygone admissible \mathcal{P}_1 et son image $p_n^M(\mathcal{P}_1)$ sont illustrés dans la Figure 4.3. Les approximations numériques obtenues sont excellentes et sont données dans la Table 4.4 et la valeur absolue des coefficients de p_n^M est représentée graphiquement dans la Figure 4.5. Le polygone admissible n'étant pas mal conditionné numériquement, nous nous attendions à une telle qualité de nos approximations.

Exemple 2

Nous considérons l'uniformisation $(\mathcal{P}_2, G_2, G'_2; \tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$ de la surface hyperelliptique de genre 3 \mathbb{D}/G_2 dont le groupe d'automorphismes est isomorphe au groupe D_8 , lorsque les deux éléments hyperboliques entrant dans la définition du groupe auxiliaire d'isométries G'_2 sont

FIGURE 4.3. Dodécagone régulier $\mathcal{P}_1 \subset \mathbb{D}$ et son image $p_n^M(\mathcal{P}_1) \subset \mathbb{C}$.TABLE 4.4. Approximations basées sur le polygone \mathcal{P}_1 et le groupe auxiliaire G'_1 .

τ_n^M	$-2.05590431013067950 \times 10^{-11} + 0.99999999996464328 i$
\tilde{a}_1	$1.99999999985 + 8.99844487209 \times 10^{-11} i$
\tilde{a}_2	$1.00000000002 + 0.577350269147 i$
\tilde{a}_3	$1.00000000001 + 1.73205080757 i$
\tilde{a}_4	$0.999999999912 - 1.73205080766 i$
\tilde{a}_5	$0.99999999993 - 0.577350269201 i$
RN	$5.57563740340 \times 10^{-11}$

$g_1, g_\tau = g_4$. Il est alors connu que

$$\tau_{BS} = -1 + i,$$

$$a_1 = -1,$$

$$a_2 = -1 - \sqrt{2},$$

$$a_3 = -3 - 2\sqrt{2},$$

$$a_4 = 3 + 2\sqrt{2},$$

$$a_5 = 1 + \sqrt{2}.$$

Notons que la courbe algébrique associée à \mathbb{D}/G_2 est dans la même classe conforme que la courbe algébrique associée à l'équation $y^2 = x^8 - 1$. Le polygone admissible \mathcal{P}_2 et son image $p_n^M(\mathcal{P}_2)$ sont illustrés dans la Figure 4.6. Les approximations numériques obtenues sont données dans la Table 4.7, et la valeur absolue des coefficients de p_n^M est représentée graphiquement dans la Figure 4.8.

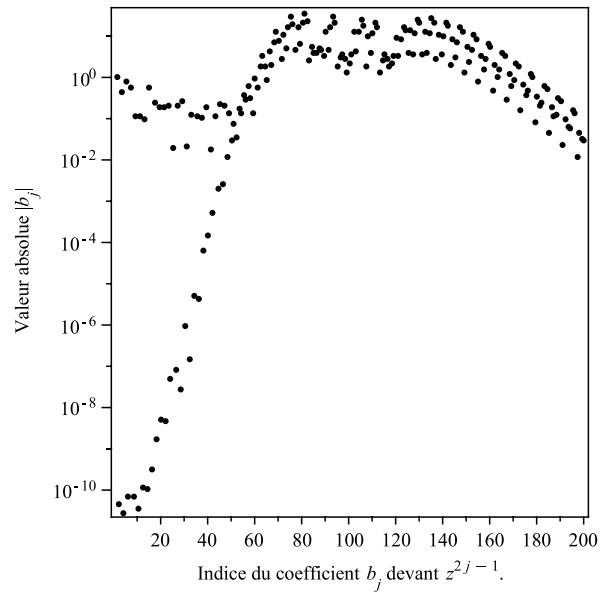


FIGURE 4.5. Graphique de la valeur absolue des coefficients du polynôme d'approximation p_n^M (pour \mathcal{P}_1, G'_1).

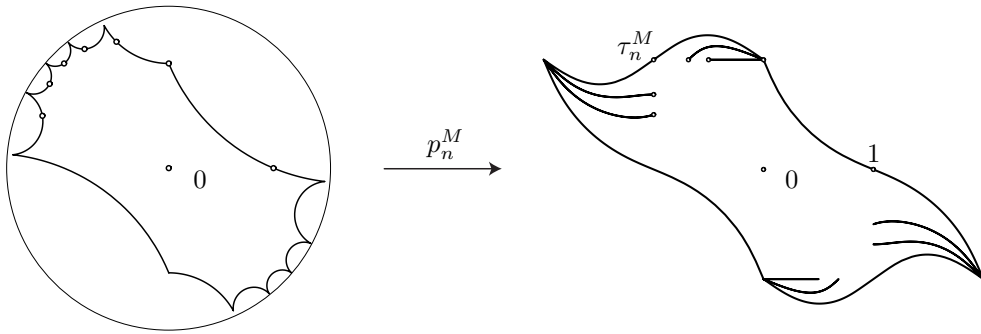


FIGURE 4.6. Polygone $\mathcal{P}_2 \subset \mathbb{D}$ et son image $p_n^M(\mathcal{P}_2) \subset \mathbb{C}$.

TABLE 4.7. Approximations basées sur le polygone \mathcal{P}_2 avec le groupe auxiliaire G'_2 .

τ_n^M	$-1.00001531470242844 + 0.999770074216569826 i$
\tilde{a}_1	$-0.998993936830 - 0.0000669314363203 i$
\tilde{a}_2	$-2.41253556461 + 0.000687392543147 i$
\tilde{a}_3	$-5.82494495090 + 0.00182804362172 i$
\tilde{a}_4	$5.82574055486 - 0.00187754216600 i$
\tilde{a}_5	$2.41333906641 - 0.000741012972728 i$
RN	0.0000000314143397292

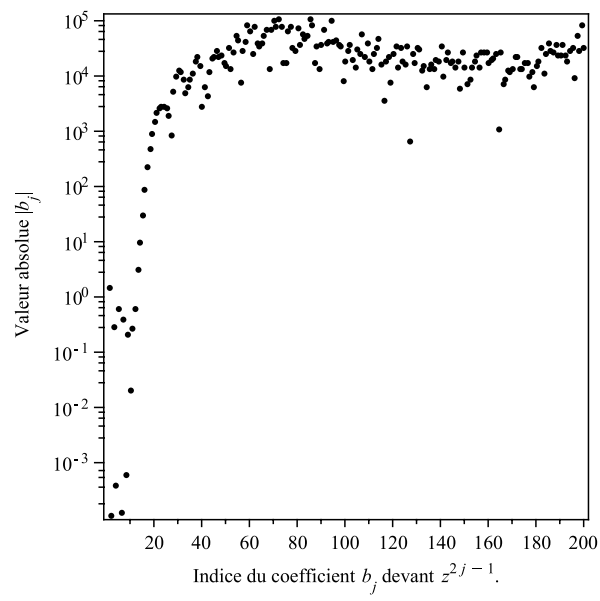


FIGURE 4.8. Graphique de la valeur absolue des coefficients du polynôme d'approximation p_n^M pour \mathcal{P}_2, G'_2 .

Chapitre 5

Méthode d'uniformisation via décomposition du polygone admissible

Soit $(\mathcal{P}, G, G'; \tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$ une uniformisation à la Buser-Silhol d'une surface de Riemann hyperelliptique de genre $n \geq 2$. En général, le $4n$ -gone admissible \mathcal{P} est mal conditionné numériquement, i.e. possède plusieurs sommets de valeur absolue supérieure à 0.99. Afin de remédier, du moins partiellement, à certains des problèmes numériques pouvant limiter la vitesse de convergence des approximations de $\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}}$, tel le phénomène de *crowding*, nous avons développé une méthode de décomposition du polygone admissible, couplée avec une adaptation de la méthode d'uniformisation de Buser-Silhol. Dans la Section 5.1, nous décrivons notre méthode de décomposition et l'adaptation en conséquence de la méthode d'uniformisation de Buser-Silhol. Dans la Section 5.2, nous traitons un exemple d'octogone mal conditionné numériquement à l'aide de notre méthode de décomposition en deux et trois domaines.

5.1 Cadre théorique de la méthode

Soit $(\mathcal{P}, G, G'; \tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$ une uniformisation à la Buser-Silhol d'une surface de Riemann hyperelliptique de genre $n \geq 2$ tel que le $4n$ -gone admissible \mathcal{P} est mal conditionné numériquement.

Notre méthode est constituée de deux étapes principales : la décomposition du polygone \mathcal{P} en plusieurs polygones hyperboliques et le calcul d'approximations de τ_{BS} et d'approximations *non polynomiales* de f_{BS} .

Tout d'abord, nous décomposons le polygone \mathcal{P} en une famille $\{\mathcal{Q}_i\}_{i=1}^N$ de polygones hyperboliques ayant chacun approximativement le même diamètre hyperbolique. Le diamètre est choisi de sorte que les polygones \mathcal{Q}_i , une fois ramenés au centre de \mathbb{D} à l'aide d'une isométrie hyperbolique, ne soient pas mal conditionnés numériquement. Pour chaque $i = 1, \dots, N$, nous choisissons alors un point $c_i \in \mathcal{Q}_i$ de sorte que le polygone centré $g_{c_i}(\mathcal{Q}_i)$ n'est pas mal

conditionné numériquement, où $g_{c_i} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ l'isométrie hyperbolique définie par

$$g_{c_i}(z) = \frac{z - c_i}{1 - \overline{c_i}z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Ensuite, sur chaque polygone centré $g_{c_i}(\mathcal{Q}_i)$, nous calculons une approximation polynomial p de la fonction holomorphe $f_i = f_{\text{BS}} \circ g_{c_i}^{-1} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$, à l'aide d'une adaptation de la méthode d'approximation de Buser-Silhol. La fonction $p \circ g_c$ nous donne alors une approximation *non polynomiale* de f_{BS} . Le fait d'approcher f_{BS} par $p \circ g_c$ permet de réduire l'apparition du phénomène de *crowding* au voisinage de P (voir par exemple [DV98]). De plus, puisque $f_{\text{BS}} \circ g_c^{-1}$ admet un développement en série de Taylor en $0 \in \mathbb{D}$, la convergence des approximations $p \circ g_c$ devrait - nous utilisons le conditionnel car cette convergence dépend de la démonstration de la Conjecture 3.52 - être meilleure, au voisinage de P qu'une approximation polynomiale du développement en série de Taylor de f_{BS} en 0, si δ est choisi suffisamment petit. Notre méthode a pour but de réduire le résidu normalisé RN (dont la définition est étendue ci-après) et de stabiliser (*i.e.* réduire leur taille) les coefficients des polynômes d'approximation des f_i afin d'améliorer la qualité des approximations de $(\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$ et, par suite, la qualité de l'approximation des coefficients $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1} \in \mathbb{C}$ caractérisant une courbe algébrique conformément équivalente à la surface de Riemann hyperelliptique \mathbb{D}/G de genre $n \geq 2$.

Mentionnons encore que notre méthode approche simultanément les fonctions f_1, \dots, f_N via certaines équations fonctionnelles, à savoir des relations de périodicité (couplées et non couplées) ainsi que des conditions de recollement couplant les fonctions f_i, f_j si leurs polygones $\mathcal{Q}_i, \mathcal{Q}_j$ sont contigus.

Soient $c \in \mathbb{D}$ et $k_\tau \in \{2, \dots, 2n\}$. Nous définissons les fonctions biholomorphes sur \mathbb{D} suivantes

$$g_{1,c} = g_c \circ g_1 \circ g_c^{-1} \quad \text{et} \quad g_{\tau,c} = g_c \circ g_{k_\tau} \circ g_c^{-1},$$

et pour tout $j \in I' = \{1, 2, \dots, 4n\} \setminus \{1, k_\tau, 2n+1, 2n+k_\tau\}$,

$$h_{j,c} = g_c \circ h_{j,c} \circ g_c^{-1}.$$

Lemme 5.1 *Soit $(\mathcal{P}, G, G'; \tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$ une uniformisation à la Buser-Silhol d'une surface de Riemann hyperelliptique de genre $n \geq 2$ et $c \in \mathbb{D}$. S'il existe une fonction holomorphe $f : g_c(U) \longrightarrow \mathbb{C}$, avec U un voisinage ouvert de l'adhérence de \mathcal{O} , et un nombre complexe $\tau \in \mathbb{C}$ vérifiant les conditions suivantes :*

$$i) \quad f(g_c(0)) = f(-c) = 0,$$

$$ii) \quad f \circ g_{1,c} = f + 2,$$

$$iii) \quad f \circ g_{\tau,c} = f + 2\tau,$$

$$iv) \quad f \circ h_{i,c} = f \text{ pour } i \in I'$$

alors $f \circ g_c|_U = f_{\text{BS}}|_U$ et $\tau = \tau_{\text{BS}}$.

Preuve. Puisque la fonction $f \circ g_c$ vérifie les conditions de la Proposition 4.9, nous avons $f \circ g_c|_U = f_{\text{BS}}|_U$ et $\tau = \tau_{\text{BS}}$. D'où le lemme. \square

À présent, nous décrivons plus précisément notre méthode d'uniformisation via décomposition du polygone admissible dans le cas où le polygone admissible est un octogone ($n = 2$) et la

décomposition se fait en deux domaines. Nos arguments restent, néanmoins, les mêmes pour les $4n$ -gones admissible avec $n \geq 2$.

Soient $(\mathcal{O}, G, G'; \tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$ une uniformisation à la Buser-Silhol d'une surface de Riemann hyperelliptique de genre 2. Considérons les polygones hyperboliques $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ caractérisés par

$$\mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2 = \mathcal{O}, \quad \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2 =]m_3, m_7[_h, \quad \mathcal{Q}_1 = -\mathcal{Q}_2, \quad \mathcal{Q}_1 \ni m_5,$$

des points $c_1 \in \mathcal{Q}_1$, $c_2 \in \mathcal{Q}_2$ et les arcs géodésiques suivants

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= [m_3, m_7]_h, & \gamma_2 &= g_{c_1}([s_4, s_5]_h), & \gamma_3 &= g_{c_1}([s_5, s_6]_h), & \gamma_4 &= g_{c_1}([s_6, m_7]_h), \\ \gamma_5 &= g_{c_1}([s_3, s_4]_h), & \gamma_6 &= g_{c_2}([s_1, s_2]_h), & \gamma_7 &= g_{c_2}([m_7, s_7]_h), & \gamma_8 &= g_{c_2}([s_7, s_8]_h). \end{aligned}$$

La situation est illustrée dans la Figure 5.1.

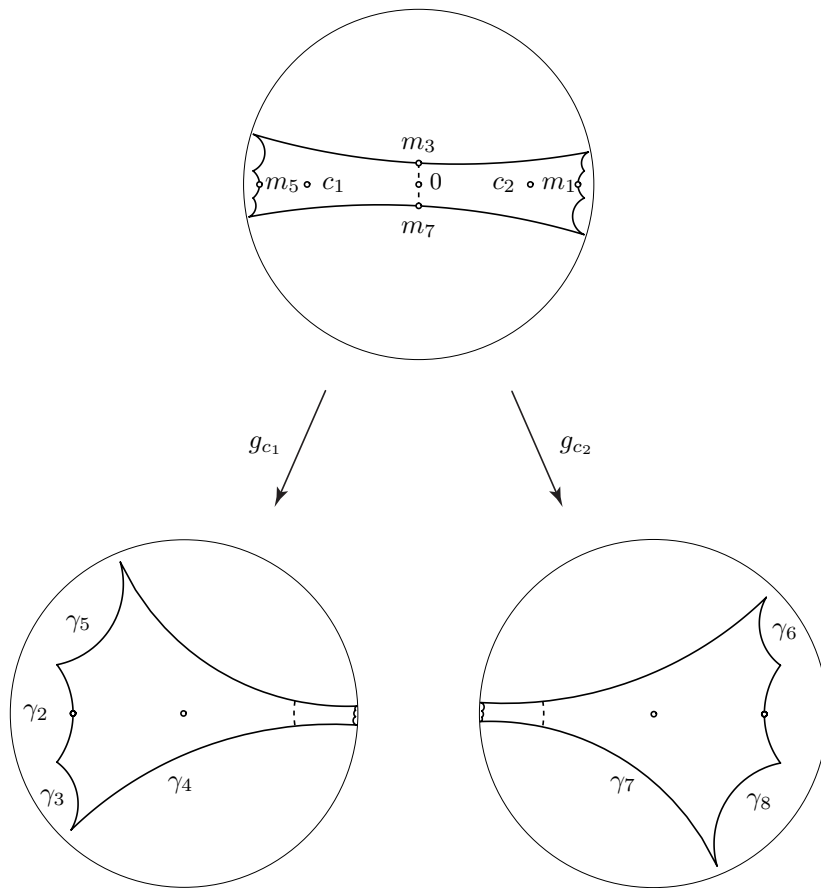


FIGURE 5.1. *Décomposition d'un octogone en deux domaines avec $c_2 = -c_1$.*

Notre méthode d'approximation via la décomposition en deux domaines repose sur le lemme suivant.

Lemme 5.2 *Soient $(\mathcal{O}, G, G'; \tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$ une uniformisation à la Buser-Silhol d'une surface de Riemann hyperelliptique de genre 2 et $c_i \in \mathcal{Q}_i$, $i = 1, 2$. Supposons qu'il existe deux fonctions*

holomorphes $f_i : g_{c_i}(U) \longrightarrow \mathbb{C}$, avec U un voisinage ouvert de \mathcal{O} , $i = 1, 2$, et un nombre $\tau \in \mathbb{C}$ tels que les conditions suivantes soient vérifiées :

Conditions de base sur f_1 et f_2 :

$$i) f_i(g_{c_i}(0)) = 0, i = 1, 2,$$

Condition de recollement de f_1 et f_2 :

$$ii) f_1 \circ g_{c_1} = f_2 \circ g_{c_2} \text{ sur } \gamma_1,$$

Relation de périodicité couplant f_1 et f_2 :

$$iii) f_2 \circ \tilde{g}_1 = f_1 + 2 \text{ sur } \gamma_2,$$

Relations de périodicité de f_1 :

$$iv) f_1 \circ h_{6,1} = f_1 \text{ sur } \gamma_3,$$

$$v) f_1 \circ g_{3,1} = f_1 + 2\tau \text{ sur } \gamma_4,$$

$$vi) f_1 \circ h_{4,1} = f_1 \text{ sur } \gamma_5,$$

Relations de périodicité de f_2 :

$$vii) f_2 \circ h_{2,2} = f_2 \text{ sur } \gamma_6,$$

$$viii) f_2 \circ g_{3,2} = f_2 + 2\tau \text{ sur } \gamma_7,$$

$$ix) f_2 \circ h_{8,2} = f_2 \text{ sur } \gamma_8.$$

Alors, $\tau = \tau_{BS}$ et $f_i \circ g_{c_i}|_U = f_{BS}|_U$, $i = 1, 2$.

Preuve. Notons tout d'abord que la condition de recollement est vérifiée sur U tout en entier (Principe d'identité des fonctions holomorphes). La fonction f_1 vérifie encore les trois relations de périodicité suivantes :

$$f_1 \circ g_{1,1} = f_1 \circ g_{c_1} \circ g_1 \circ g_{c_1}^{-1} \stackrel{ii)}{=} f_2 \circ g_{c_2} \circ g_1 \circ g_{c_2}^{-1} = f_2 \circ \tilde{g}_1 \stackrel{iii)}{=} f_1 + 2,$$

$$f_1 \circ h_{2,1} = f_1 \circ g_{c_1} \circ h_2 \circ g_{c_1}^{-1} \stackrel{ii)}{=} f_2 \circ g_{c_2} \circ h_2 \circ g_{c_1}^{-1} = f_2 \circ h_{2,2} \circ g_{c_2} \circ g_{c_1}^{-1} \stackrel{viii)}{=} f_2 \circ g_{c_2} \circ g_{c_1}^{-1} \stackrel{ii)}{=} f_1,$$

$$f_1 \circ h_{8,1} = \dots = f_1.$$

Par le Lemme 5.1, nous avons ainsi $\tau = \tau_{BS}$ et $f_1 \circ g_{c_1}|_U = f_{BS}|_U$. La démonstration pour f_2 est similaire et le lemme s'ensuit. \square

Remarque 5.3 Dans le cas $c_1 = -c_2 = c \in \mathcal{Q}_1$, il découle de la condition de recollement $ii)$ que $f_1 = f_2 \circ h_{-c}$, où $h_{z_0} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ est le demi-tour (hyperbolique) autour de $z_0 \in \mathbb{D}$.

À présent, soit $\tilde{\delta} > 0$ et $\tilde{D} = N_{\tilde{\delta}}(\mathcal{O})$ le $\tilde{\delta}$ -voisinage de l'octogone \mathcal{O} . Nous définissons les espaces suivants :

$$L_c^2(\tilde{D}) = \{f \in L^2(g_c(\tilde{D})) \mid f(g_c(0)) = f(-c) = 0\},$$

$$\mathcal{P}_c^n = \{p \in \mathcal{P}^n \mid p(g_c(0)) = p(-c) = 0\},$$

$$X_c = \mathbb{C} \times L_{c_1}^2(\tilde{D}) \times L_{c_2}^2(\tilde{D}).$$

Notons $\Gamma = \gamma_1 \sqcup \dots \sqcup \gamma_8$ la réunion disjointes des arcs γ_j définis plus haut. Soient $\sigma = \{\sigma^M\}_{M \geq 1}$, où $\sigma^M = \{\{z_{j,k}^M\}_{k=1}^M\}_{j=1}^8$ est une subdivision conforme de Γ à $8M$ points, et $RN_{c,\sigma^M} : X_c \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonctionnelle définie par

$$\begin{aligned} RN_{c,\sigma^M}^2(\tau, f, \tilde{f}) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \{ & |f(g_{c_1}(z_{1,k}^M)) - \tilde{f}(g_{c_2}(z_{1,k}^M))|^2 + |\tilde{f}(\tilde{g}_1(z_{2,k}^M)) - f(z_{2,k}^M)|^2 \\ & + |f(h_{6,1}(z_{3,k}^M)) - f(z_{3,k}^M)|^2 + |f(g_{3,1}(z_{4,k}^M)) - f(z_{4,k}^M) - 2\tau|^2 \\ & + |f(h_{4,1}(z_{5,k}^M)) - f(z_{5,k}^M)|^2 + |\tilde{f}(h_{2,2}(z_{6,k}^M)) - \tilde{f}(z_{6,k}^M)|^2 \\ & + |\tilde{f}(g_{3,2}(z_{7,k}^M)) - \tilde{f}(z_{7,k}^M)|^2 + |\tilde{f}(h_{8,2}(z_{8,k}^M)) - \tilde{f}(z_{8,k}^M)|^2 \} \end{aligned}$$

avec $(\tau, f, \tilde{f}) \in X_c$.

En reprenant la même démarche et les mêmes arguments que ceux développés dans le Section 3.4, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 5.4 *Pour chaque entier $n \geq 1$, il existe un entier M_n et une suite*

$$\{(\tau_n^M, p_{1,n}^M, p_{2,n}^M)\}_{M \geq M_n} \subset \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{c_1}^n \times \mathcal{P}_{c_2}^n$$

tels que, pour tout entier $M \geq M_n$, l'élément $(\tau_n^M, p_{1,n}^M, p_{2,n}^M)$ vérifie

$$RN_{c,\sigma^M}(\tau_n^M, p_{1,n}^M, p_{2,n}^M) = \min\{RN_{c,\sigma^M}(\tau, p_1, p_2) \mid (\tau, p_1, p_2) \in \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{c_1}^n \times \mathcal{P}_{c_2}^n\}.$$

Conjecture 5.5 *Soit $\{(\tau_n^{m_n}, p_{1,n}^{m_n}, p_{2,n}^{m_n})\}_{n \geq 1} \subset X$ une suite vérifiant, pour tout $n \geq 1$,*

$$m_n \geq M_n,$$

$$(\tau_n^{m_n}, p_{1,n}^{m_n}, p_{2,n}^{m_n}) \in \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{c_1}^n \times \mathcal{P}_{c_2}^n,$$

$$RN_{\sigma^{m_n}}(\tau_n^{m_n}, p_{1,n}^{m_n}, p_{2,n}^{m_n}) = \min\{RN_{\sigma^{m_n}}(\tau, p_1, p_2) \mid (\tau, p_1, p_2) \in \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{c_1}^n \times \mathcal{P}_{c_2}^n\}.$$

Alors, la suite $\{\tau_n^{m_n}\}_{n \geq 1}$ converge vers τ_{BS} et, pour tout entier $k \geq 0$, la suite de polynômes $\{p_{i,n}^{m_n(k)}\}_{n \geq 1}$ converge vers $(f_{BS} \circ g_{c_i}^{-1})^{(k)}$ uniformément localement dans $g_{c_i}(\mathcal{Q}_i)$, pour $i = 1, 2$.

Remarque 5.6

- La démonstration de la Conjecture 5.5 repose essentiellement sur la Conjecture 3.52 (et le Théorème 3.71).
- Au vu de la preuve du Lemme 5.1 qui illustre la transmission des relations de périodicité par les conditions de recollement et au vu du Lemme 5.2, la méthode d'approximation via la décomposition de l'octogone en deux domaines présentée ci-dessus se généralise à N domaines comme suit : soit $\{\mathcal{Q}_i\}_{i=1}^N \subset \mathcal{O}$ une famille de polygones hyperboliques telle que $\cup_{i=1}^N \mathcal{Q}_i = \mathcal{O}$, l'intersection $\mathcal{Q}_i \cap \mathcal{Q}_j$ pour tout $i \neq j$ est soit vide, soit un sommet ou un côté commun aux deux polygones, et soit $\{c_i\}_{i=1}^N \subset \mathcal{O}$ un ensemble de points tel que chaque c_i appartient à l'intérieur de \mathcal{Q}_i . Alors, l'ensemble de fonctions $\{f_i = f_{BS} \circ g_{c_i}^{-1}\}_{i=1}^N$ est caractérisé par l'ensemble des conditions suivantes :

- i) les conditions de base $f_i(g_{c_i}(0)) = 0$,
 - ii) les conditions de recollement $f_i \circ g_{c_i} = f_j \circ g_{c_j}$, $i \neq j$, si l'intersection $\mathcal{Q}_i \cap \mathcal{Q}_j$ est un côté commun aux deux polygones,
 - iii) les relations de périodicité couplant f_i et f_j , $i \neq j$, si \mathcal{Q}_i et \mathcal{Q}_j ont des points identifiés par $g_1, g_3, h_2, h_4, h_6, h_8$,
 - iv) les relations de périodicité pour f_i si \mathcal{Q}_i a des points identifiés par $g_1, g_3, h_2, h_4, h_6, h_8$.
- c) La méthode de décomposition se généralise aux $4n$ -gones admissibles mal conditionné numériquement, $n \geq 2$.

5.2 Exemples d'uniformisation numérique via décomposition

Nous considérons l'uniformisation $(\mathcal{O}, G, G'; \tau_{BS}, f_{BS})$ avec \mathcal{O} l'octogone de paramètres de Fenchel-Nielsen $(2\sqrt{5}, 0, \frac{47}{2}, \frac{1}{4}, 2\sqrt{5}, 0)$ obtenu via la décomposition de type *Octo2*. Les deux éléments hyperboliques entrant dans la définition du groupe auxiliaire G' sont g_1 et $g_\tau = g_3$. Nous avons les valeurs absolues des sommets de \mathcal{O} suivantes

$$|s_1| = 0.99802634702, \quad |s_2| = 0.70190340283, \quad |s_3| = 0.79656261821, \quad |s_4| = 0.97669272951.$$

Puisque $|s_1| > 0.99$, l'octogone \mathcal{O} est mal conditionné numériquement. L'octogone \mathcal{O} est illustré dans la Figure 5.2.

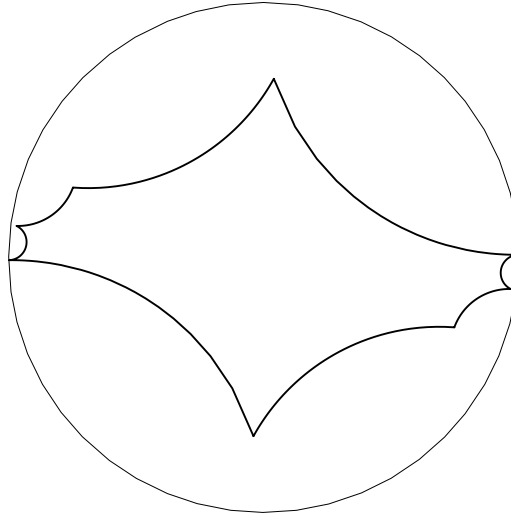


FIGURE 5.2. Octogone admissible $\mathcal{O} \subset \mathbb{D}$.

Nous avons calculé, avec $M = 100$ points (par arc) :

- D1. Une approximation sans décomposition avec $n = 200$ fonctions base, *i.e.* avec une approximation polynomiale de f_{BS} de degré $2n - 1 = 399$.
- D2. Une approximation via décomposition de l'octogone en 2 domaines (voir Figure 5.3) avec $n = 400$ fonctions de base, *i.e.* avec une approximation polynomiale de $f_{\text{BS}} \circ g_{c_i}^{-1}$ de degré $n = 400$, $i = 1, 2$. Nous avons pris le milieu hyperbolique du segment $[0, m_5]_h$ pour $c_1 = -c_2$.
- D3. Une approximation via décomposition de l'octogone en 3 domaines (voir Figure 5.4) avec $n = 400$ fonctions de base, *i.e.* avec une approximation polynomiale de $f_{\text{BS}} \circ g_{c_i}^{-1}$ de degré $n = 400$, $i = 1, 2, 3$. Nous avons pris, pour $c_1 = -c_3$, le milieu hyperbolique du segment hyperbolique d'extrémités m_5 et le milieu hyperbolique du segment $[s_3, s_6]_h$, et $c_2 = 0$.

Nos résultats numériques sont présentés dans les tables ci-dessous. Il est en particulier intéressant de constater que l'approximation des coefficients a_1, a_2, a_3 sans décomposition de l'octogone sont excellentes sauf pour le coefficient a_1 qui est l'image du sommets mal conditionné s_1 .

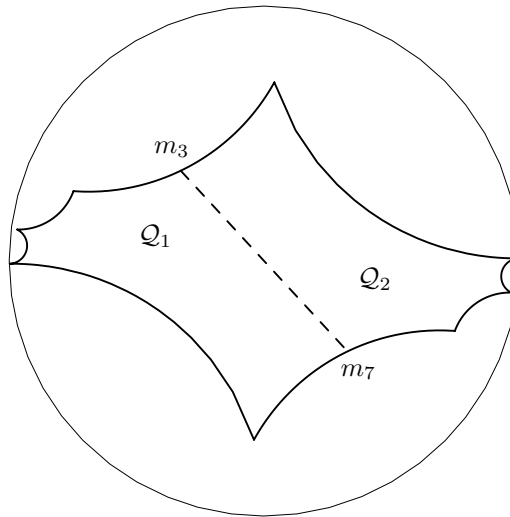


FIGURE 5.3. *Décomposition de l'octogone en 2 domaines.*

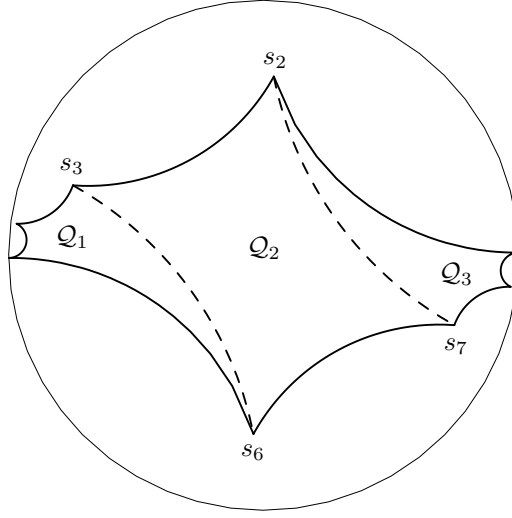


FIGURE 5.4. *Décomposition de l'octogone en 3 domaines.*

TABLE 5.5. *Approximations de a_1, a_2, a_3 .*

	a_1	a_2	a_3
$D1$	$1.3376380300 + 0.41535774633 i$	$0.93768527700 + 0.0072901939973 i$	$0.87867756244 + 0.15345438778 i$
$D2$	$1.1141922727 + 0.33629371832 i$	$0.93767237051 + 0.0072979797424 i$	$0.87867539410 + 0.15344581862 i$
$D3$	$1.1141922723 + 0.33629371757 i$	$0.93767237057 + 0.0072979797835 i$	$0.87867539402 + 0.15344581856 i$

TABLE 5.6. *Résidus normalisés et approximations de τ_{BS} .*

	RN	τ_n^M
$D1$	0.000811666286546057232	$-0.211203750223653591 + 0.750071079885001546 i$
$D2$	$1.31934395880899193 \times 10^{-11}$	$-0.211201375504448591 + 0.750071503530920114 i$
$D3$	$1.32592686119657418 \times 10^{-11}$	$-0.211201375407580744 + 0.750071503109388082 i$

TABLE 5.7. *Approximations des invariants d'Igusa de \mathbb{C} .*

	I_1	I_2
$D1$	$2821990.5162 + 1815339.1453\,i$	$-468858.60523 + 10867505.880\,i$
$D2$	$-366676.27232 + 70653.932314\,i$	$-940559.96599 - 594767.16636\,i$
$D3$	$-366676.26668 + 70653.929650\,i$	$-940559.95816 - 594767.16066\,i$

	I_3	I_4
$D1$	$68438538.813 + 146132694.96\,i$	$-635115303.50 + 761260499.08\,i$
$D2$	$-1174068.1347 - 1102271.8121\,i$	$90541.616751 + 149512.01607\,i$
$D3$	$-1174068.1299 - 1102271.7813\,i$	$90541.625889 + 149512.02286\,i$

Chapitre 6

Commentaires et perspectives de recherche

Les sujets pour lesquels nous avons actuellement beaucoup d'intérêt et auxquels nous prévoyons d'étendre nos recherches sont principalement en relation avec le problème de l'uniformisation des surfaces de Riemann hyperelliptiques et avec la géométrie des surfaces hyperboliques.

6.1 Sur la Conjecture 3.52

Au moment d'écrire ces lignes, la Conjecture 3.52 n'a pas encore pu être démontrée, bien qu'un certain nombre d'éléments suggère sa véracité mathématique ainsi que sa démonstration.

Rappelons que la Conjecture 3.52 affirme essentiellement que la suite $\{\tau_n^\Gamma\}_{n \geq 1}$ converge vers τ_{BS} et que la suite $\{p_n^\Gamma\}_{n \geq 1}$ converge vers f_{BS} uniformément localement dans \mathcal{O} . Notons qu'il n'y est pas fait mention de la convergence de la suite $\{p_n^\Gamma\}_{n \geq 1}$ sur $\partial\mathcal{O}$, le bord de \mathcal{O} . Néanmoins, comme déjà mentionné dans la Remarque 3.53, cette convergence semble devoir être suffisamment bonne car, hormis 0, les préimages dans $\overline{\mathcal{O}}$ des points de Weierstrass de la surface hyperelliptique \mathbb{D}/G de genre 2 appartiennent à $\partial\mathcal{O}$.

Un problème préalable à la démonstration de la Conjecture 3.52 est sa formulation, en particulier l'espace auquel appartient la suite $\{p_n^\Gamma\}_{n \geq 1}$, à savoir $L_{\text{imp}}^2(\tilde{D})$. Un *meilleur* espace pour l'étude du processus de minimisation de norme sur des arcs - les arcs de Γ - semble être le suivant

$$A_{\text{imp}}^2(\partial\mathcal{O}) = \left\{ f : \overline{\mathcal{O}} \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ continue, impaire, } f|_{\mathcal{O}} \text{ holomorphe et } \int_{\partial\mathcal{O}} |f(z)|^2 |dz| < \infty \right\}.$$

Muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\mathcal{O}} : A_{\text{imp}}^2(\partial\mathcal{O}) \times A_{\text{imp}}^2(\partial\mathcal{O}) \longrightarrow \mathbb{C}$ défini par

$$\langle f, g \rangle_{\partial\mathcal{O}} = \int_{\partial\mathcal{O}} f(z) \overline{g(z)} |dz|, \quad f, g \in A_{\text{imp}}^2(\partial\mathcal{O}),$$

l'espace $A_{\text{imp}}^2(\partial\mathcal{O})$ est un espace préhilbertien (voir par exemple [Hen86, Section 18.4]). Nous notons $\|\cdot\|_{\partial\mathcal{O}}$ la norme induite. Par suite, l'espace $\tilde{X} = \mathbb{C} \times A_{\text{imp}}^2(\partial\mathcal{O})$ muni du produit scalaire

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{X}} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}} + \langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\mathcal{O}}$ est un espace préhilbertien.

Comme conséquence immédiate de la Formule intégrale de Cauchy, nous obtenons une version similaire au Lemme fondamental, comme suit.

Lemme 6.1 *Soient $f \in A_{imp}^2(\partial\mathcal{O})$, $z \in \mathcal{O}$ et $d_{euc}(z, \partial\mathcal{O})$ la distance euclidienne de z au bord de \mathcal{O} . Alors*

$$|f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{euc}(z, \partial\mathcal{O})}} \|f\|_{\partial\mathcal{O}}.$$

Corollaire 6.2 *Soient $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset A_{imp}^2(\partial\mathcal{O})$ et $f \in A_{imp}^2(\partial\mathcal{O})$ telles que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\partial\mathcal{O}} = 0.$$

Alors, la suite $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge vers f uniformément localement dans \mathcal{O} .

Notons que nous ne pouvons pas étendre la convergence uniforme du corollaire à $\overline{\mathcal{O}}$.

Par le Théorème 2.2, il existe alors une unique suite $\{(\tau_n^{\tilde{X}}, p_n^{\tilde{X}})\}_{n \geq 1} \subset \tilde{X}$ telle que

$$p_n^{\tilde{X}} \in \mathcal{P}_{imp}^{2n-1},$$

$$\|(\tau_n^{\tilde{X}}, p_n^{\tilde{X}}) - (\tau_{BS}, f_{BS})\|_{\tilde{X}} = \min \left\{ \|(\tau, p) - (\tau_{BS}, f_{BS})\|_{\tilde{X}} \mid (\tau, p) \in \mathbb{C} \times \mathcal{P}_{imp}^{2n-1} \right\}.$$

Nous souhaiterions alors comparer les quantités suivantes

$$\begin{aligned} \|\psi(\tau_n^{\Gamma}, p_n^{\Gamma}) - (2, 0, 0, 0)\|_{\Gamma}, & \quad \|(\tau_n^{\Gamma}, p_n^{\Gamma}) - (\tau_{BS}, f_{BS})\|_{\tilde{X}}, \\ \|\psi(\tau_n^{\tilde{X}}, p_n^{\tilde{X}}) - (2, 0, 0, 0)\|_{\Gamma}, & \quad \|(\tau_n^{\tilde{X}}, p_n^{\tilde{X}}) - (\tau_{BS}, f_{BS})\|_{\tilde{X}}, \end{aligned}$$

afin de pouvoir démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\tau_n^{\Gamma}, p_n^{\Gamma}) - (\tau_{BS}, f_{BS})\|_{\tilde{X}} = 0.$$

Au vu du Corollaire 6.2, la Conjecture 3.52 serait alors démontrée.

6.2 Aspects numériques de la méthode d'approximation de Buser-Silhol

Une fois démontrée la Conjecture 3.52, il serait intéressant d'obtenir des résultats sur la vitesse de convergence des approximations polynomiales de f_{BS} .

Un facteur réduisant, *a priori*, la vitesse de convergence des approximations polynomiales de manière générale, mais en particulier lorsque le $4n$ -gone admissible \mathcal{P} est mal conditionné numériquement, semble être le choix des monômes $1, z, z^2, \dots, z^n$ comme base de l'espace des polynômes de degré au plus n . L'expérience dans le domaine de l'approximation numérique d'applications conformes montre que ce choix est très souvent mauvais (voir par exemple

[Dri]). Il serait donc intéressant de mener des expérimentations numériques avec d'autres classes de polynômes de base (p. ex. les polynômes de Chebyshev), voire avec d'autres classes de fonctions plus à même de capturer la géométrie du disque de Poincaré.

Afin d'améliorer la vitesse de convergence des approximations d'une part, et de limiter le phénomène de *crowding* d'autre part, nous avons développé une méthode de décomposition de $4n$ -gones admissibles et adapté en conséquence la méthode d'approximation de Buser-Silhol (Chapitre 5). Il serait intéressant d'automatiser cette méthode de décomposition de sorte que, par exemple, le nombre de sous-domaines de la décomposition de $4n$ -gones admissibles croisse avec le mauvais conditionnement du $4n$ -gone donné. Un travail préalable semble devoir être de définir une mesure du mauvais conditionnement numérique (moins arbitraire que le critère du 0.99) et de développer un algorithme permettant d'améliorer le conditionnement numérique d'un $4n$ -gone admissible pour la méthode d'uniformisation de Buser-Silhol, *i.e.* permettant de faire un choix numériquement judicieux de g_1, g_τ .

Pour remédier au phénomène de *crowding*, une autre approche serait d'essayer d'utiliser, moyennant une certaine adaptation, la méthode numérique développée par L. Banjai (voir [Ban03], [Ban08]). Cette méthode a été développée pour le calcul d'application conforme d'un domaine polygonal ayant de multiples régions allongées, et donc fortement sujette au *crowding*, dans un domaine canonique, comme le disque unité, sans devoir recourir à une méthode de décomposition du polygone.

6.3 Domaines canoniques

Il serait intéressant d'adapter la méthode d'approximation de Buser-Silhol afin que l'on puisse lui donner comme *input*, par exemple, des surfaces à petits carreaux sur lesquels travaille R. Silhol et des surfaces données via le formalisme *point-matrice* développé par A. Aigon-Dupuy, P. Buser et K.-D. Semmler dans [ADBS05] (voir en particulier les Sections 6.4, 6.5 et le Théorème 6.17 qui devrait se généraliser sans problème aux $4n$ -gones admissibles) avec lequel travaillent actuellement K.-D. Semmler et A. Arnold.

D'une manière plus générale, il serait intéressant et utile de trouver, pour la donnée d'une surface hyperbolique, une bonne notion de *domaine canonique* devant faciliter quelque peu la lecture du groupe d'automorphisme de la surface ainsi que la résolution des deux problèmes que sont celui de l'uniformisation et celui de la détermination si deux surfaces hyperboliques, données par deux polygones fondamentaux, sont isométriques ou non. Le formalisme *point-matrice* est peut-être une piste.

6.4 Dérivée schwarzienne et fonction uniformisante

Soit \mathcal{C}_A une courbe algébrique hyperelliptique, comme définie dans le Chapitre 1. Dans [Wag01], M. Wagner, suivant une approche classique développée par Henri Poincaré, construit une fonction méromorphe $S : \mathbb{C} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ à partir de la dérivée schwarzienne des inverses locaux de la fonction uniformisante $\tilde{\pi} : \mathbb{D} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. L'expression de S est explicite avec, toutefois, des paramètres inconnus, les *paramètres accessoires*. Hormis une dépendance analytique (réelle), peu de choses sont connues sur ces paramètres accessoires. En particulier, leur interprétation géométrique n'est actuellement pas connue.

Puisque la fonction uniformisante $\tilde{\pi}$ ne diffère de la fonction uniformisante $F_{\text{BS}} = T_{\tau_{\text{BS}}} \circ f_{\text{BS}} : \mathbb{D} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ provenant de la méthode d'uniformisation de Buser-Silhol que par une transformation de Möbius, il serait dès alors intéressant d'étudier le lien entre S et $\tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}}$ (ainsi que leurs approximations) et, en particulier, d'obtenir des estimations qualitatives *a priori* des coefficients de Taylor de f_{BS} . Par exemple, ces coefficients sont-ils bornés ?

De plus, nous pourrions essayer d'estimer et étudier le comportement des paramètres accessoires apparaissant dans cette approche. Pourrions-nous ainsi obtenir une certaine interprétation géométrique des paramètres accessoires ?

6.5 Module conforme de quadrilatères

Rappelons brièvement la notion de module conforme d'un quadrilatère. Un domaine de Jordan $Q \subset \mathbb{C}$ avec quatre points marqués consécutifs $a, b, c, d \in \partial Q$ est appelé un *quadrilatère* et est noté $(Q; a, b, c, d)$. Le *Riemann Mapping Theorem* implique qu'il existe un unique nombre réel $h > 0$ et une unique application conforme de Q sur le rectangle $R_h = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x \in]0, 1[, y \in]0, h[\}$ qui envoie les points a, b, c, d sur $0, 1, 1 + ih, ih$ respectivement. Le nombre h est appelé le *module conforme* du quadrilatère $(Q; a, b, c, d)$.

À présent, soient \mathcal{P} un $4n$ -gone admissible \mathcal{P} et $(\mathcal{P}, G, G'; \tau_{\text{BS}}, f_{\text{BS}})$ une uniformisation à la Buser-Silhol. Le nombre $\tau_{\text{BS}} \in \mathbb{H}$ joue un rôle central dans la méthode d'uniformisation de Buser-Silhol et, tout comme f_{BS} , ce *paramètre accessoire* est inconnu. Dans la méthode d'approximation de Buser-Silhol, ce paramètre est estimé en le posant simplement comme une inconnue dans le système linéaire surdéterminé décrit au Chapitre 1 (Table 1.4, page 21). Toutefois, au vu du rôle crucial que joue τ_{BS} dans ce processus d'uniformisation, il semble justifié de vouloir l'étudier ou l'estimer de manière indépendante.

Basée sur la notion de module conforme de quadrilatères ayant pour domaine le $4n$ -gone \mathcal{P} , notre idée est d'obtenir des informations *a priori* sur $|\tau_{\text{BS}}|, \arg(\tau_{\text{BS}})$. Nous remarquons que τ_{BS} est fortement lié à la géométrie de $f_{\text{BS}}(\mathcal{P})$ (cf. Théorème 4.5) et, au vu des symétries de f_{BS} , la géométrie $f_{\text{BS}}(\mathcal{P})$ est fortement liée à celle du parallélogramme de sommets $1 - \tau_{\text{BS}}, 1 + \tau_{\text{BS}}, -1 + \tau_{\text{BS}}, -1 - \tau_{\text{BS}}$. De plus, f_{BS} étant une application conforme dans \mathcal{P} , le module conforme d'un quadrilatère $(\mathcal{P}; a, b, c, d)$, avec $a, b, c, d \in \partial \mathcal{P}$, est égal au module conforme du quadrilatère $(f_{\text{BS}}(\mathcal{P}); f_{\text{BS}}(a), f_{\text{BS}}(b), f_{\text{BS}}(c), f_{\text{BS}}(d))$.

Une étape intermédiaire de notre approche est l'étude de la famille de parallélogrammes de sommets $0, 1, 1 + x + iy, x + iy$, paramétrisée par $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, de module conforme constant. La quantité $|x + iy|$ en fonction de $\arg(x + iy) \in]0, \frac{\pi}{2}[$ est étudiée en particulier.

Lemme 6.3 *Pour tout réel $h > 0$, il existe une unique fonction $\lambda_h :]0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que la famille de parallélogramme de sommets $0, 1, 1 + \lambda_h(\theta)e^{i\theta}, \lambda_h(\theta)e^{i\theta}$ soit de module conforme constant égal à h . De plus, λ_h est continue, $\lambda_h(\frac{\pi}{2}) = h$ et*

- si $h < 1$, λ_h est une fonction décroissante,
- si $h = 1$, λ_h est la fonction constante égale à 1,
- si $h > 1$, λ_h est une fonction croissante.

La démonstration de ce résultat utilise des applications de Schwarz-Christoffel (voir par exemple [DT02]) et des changements de variable judicieux dans des intégrales impliquées, sauf pour le cas $h = 1$ qui est établi pour des raisons de symétrie. Nous conjecturons que $\lim_{\theta \rightarrow 0} \lambda_h(\theta) = 1$ quel que soit $h > 0$, que λ_h est concave si $h < 1$ et convexe si $h > 1$, ainsi qu'une dépendance analytique réelle de λ_h par rapport à h . Un note sur ce travail de recherche est en préparation [Aub].

L'étude de cette fonction de longueur λ_h sur des familles de parallélogrammes euclidiens initie, peut-être, une méthode d'approximation alternative de τ_{BS} . Nous allons étudier le lien entre τ_{BS} et le module conforme de quadrilatères dont les domaines sont le $4n$ -gone admissible \mathcal{P} . En particulier, nous recherchons une éventuelle caractérisation du $4n$ -gone admissible \mathcal{P} donné à l'aide du module conforme de quadrilatères dont il est le domaine.

Notre motivation pour cette étude vient aussi des observations effectuées lors de nos expérimentations numériques. En particulier, lors du calcul d'approximations de familles $\{(\tau_{BS}^t, f_{BS}^t)\}_t$ associées à une famille de $4n$ -gones admissibles $\{\mathcal{P}_t\}_t$ qui est continue par rapport un paramètre réel t (i.e. les sommets de \mathcal{P}^t sont des fonctions continues en t), nous avons observé certains *phénomènes de monotonie* liant des quantités dans \mathbb{D} et leur image, par f_{BS} , dans \mathbb{C} , parmi lesquelles : les valeurs absolues $\{|m_{k_r}^t|\}_t$ et les valeurs absolues $\{|\tau_{BS}^t|\}_t$, les angles $\{\angle(m_1^t, m_{k_r}^t)\}_t$ et les angles $\{\arg(\tau_{BS}^t)\}_t$ ou encore les longueurs euclidiennes de côtés de \mathcal{P}^t (avec $i \in I'$) $\{\ell_{eucl}([s_i^t, s_{i+1}^t]_h)\}_t$ et les longueurs de *slits* $\{\ell_{eucl}(f_{BS}^t([s_i^t, s_{i+1}^t]_h))\}_t$.

Finalement, mentionnons encore que l'étude de la fonction λ_h se veut aussi un peu dans l'esprit des expérimentations computationnelles sur le module conforme de quadrilatères polygonaux que A. Rasila et M. Vuorinen ont effectué (cf. [RV06], [RV07]).

6.6 Développement d'applications informatiques

L'idée est de développer des applications informatiques utilisant **C++/Fortran** et des langages de plus haut niveau afin d'effectuer des expérimentations numériques sur les surfaces de Riemann, en particulier relatives à : des polygones hyperboliques fondamentaux pour des surfaces de Riemann hyperelliptiques, la méthode d'uniformisation de Buser-Silhol (et sa généralisation aux surfaces de Riemann hyperelliptiques de genre supérieur à 2), des méthodes

de décomposition de polygones fondamentaux hyperboliques et le module conforme de parallélogrammes. L'objectif est de rendre ces applications librement accessibles aux chercheurs et étudiants des Universités afin de mener des expérimentations.

Mentionnons qu'un certain nombre de formules computationnelles ont déjà été développées, par exemple dans [BS96], [ADBC⁺05] et [ADBS05].

Bibliographie

- [ADBC⁺05] Aline Aigon-Dupuy, Peter Buser, Michel Cibils, Alfred F. Künzle, and Frank Steiner. Hyperbolic octagons and Teichmüller space in genus 2. *J. Math. Phys.*, 46(3) :033513, 25, 2005.
- [ADBS05] Aline Aigon-Dupuy, Peter Buser, and Klaus-Dieter Semmler. Hyperbolic geometry. 2005.
- [Ahl73] Lars V. Ahlfors. *Conformal invariants : topics in geometric function theory*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1973. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics.
- [Aub] Grégoire Aubry. A note on the side-length function of families of equiconformal parallelograms. *In preparation*.
- [Ban03] Lehel Banjai. *Computation of conformal maps by fast multipole method accelerated Schwarz-Christoffel transformation*. PhD thesis, University of Oxford, 2003.
- [Ban08] L. Banjai. Revisiting the crowding phenomenon in Schwarz-Christoffel mapping. *SIAM J. Sci. Comput.*, 30(2) :618–636, 2008.
- [Bea95] Alan F. Beardon. *The geometry of discrete groups*, volume 91 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. Corrected reprint of the 1983 original.
- [BS96] Peter Buser and Mika Seppälä. Computing on Riemann surfaces. In *Topology and Teichmüller spaces (Katinkulta, 1995)*, pages 5–30. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1996.
- [BS05a] Peter Buser and Robert Silhol. <http://www.math.univ-montp2.fr/~rs/genus2unifdoc.html>, 2005.
- [BS05b] Peter Buser and Robert Silhol. Some remarks on the uniformizing function in genus 2. *Geom. Dedicata*, 115 :121–133, 2005.
- [Bus92] Peter Buser. *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, volume 106 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992.
- [Cha97a] Srishti D. Chatterji. *Cours d’analyse. 1*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1997. Analyse vectorielle. [Vector analysis].
- [Cha97b] Srishti D. Chatterji. *Cours d’analyse. 2*. Mathématiques. [Mathematics]. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1997. Analyse complexe. [Complex analysis].
- [CP04] Antonio F. Costa and Ana M. Porto. On two recent geometrical characterizations of hyperellipticity. *Rev. Mat. Complut.*, 17(1) :59–65, 2004.

- [Dav75] Philip J. Davis. *Interpolation and approximation*. Dover Publications Inc., New York, 1975. Republication, with minor corrections, of the 1963 original, with a new preface and bibliography.
- [Dri] Tobin A. Driscoll. Spectrally accurate solutions to potential theory problems. In *Conference on Computational and Conformal Geometry, SUNY Stony Brook, April 20-22, 2007*, <http://www.math.sunysb.edu/~ccg2007/driscoll.pdf>.
- [DT02] Tobin A. Driscoll and Lloyd N. Trefethen. *Schwarz-Christoffel mapping*, volume 8 of *Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [Dur04] Peter Duren. *Harmonic mappings in the plane*, volume 156 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [DV98] Tobin A. Driscoll and Stephen A. Vavasis. Numerical conformal mapping using cross-ratios and Delaunay triangulation. *SIAM J. Sci. Comput.*, 19(6) :1783–1803 (electronic), 1998.
- [FK65] Robert Fricke and Felix Klein. *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. Band 1 : Die gruppentheoretischen Grundlagen. Band II : Die funktionentheoretischen Ausführungen und die Anwendungen*, volume 4 of *Bibliotheca Mathematica Teubneriana, Bände 3*. Johnson Reprint Corp., New York, 1965.
- [FK92] H. M. Farkas and I. Kra. *Riemann surfaces*, volume 71 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1992.
- [Gai87] Dieter Gaier. *Lectures on complex approximation*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1987. Translated from the German by Renate McLaughlin.
- [Hei59] Erhard Heinz. On one-to-one harmonic mappings. *Pacific J. Math.*, 9 :101–105, 1959.
- [Hen86] Peter Henrici. *Applied and computational complex analysis. Vol. 3. Pure and Applied Mathematics (New York)*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1986. Discrete Fourier analysis—Cauchy integrals—construction of conformal maps—univalent functions, A Wiley-Interscience Publication.
- [Igu60] Jun-ichi Igusa. Arithmetic variety of moduli for genus two. *Ann. of Math. (2)*, 72 :612–649, 1960.
- [Jos06] Jürgen Jost. *Compact Riemann surfaces*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2006. An introduction to contemporary mathematics.
- [JS87] Gareth A. Jones and David Singerman. *Complex functions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987. An algebraic and geometric viewpoint.
- [Lax02] Peter D. Lax. *Functional analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2002.
- [Mir95] Rick Miranda. *Algebraic curves and Riemann surfaces*, volume 5 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.
- [MZ80] Ralph Menikoff and Charles Zemach. Methods for numerical conformal mapping. *J. Comput. Phys.*, 36(3) :366–410, 1980.
- [RV06] Antti Rasila and Matti Vuorinen. Experiments with moduli of quadrilaterals. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 51(5-6) :747–757, 2006.

- [RV07] Antti Rasila and Matti Vuorinen. Experiments with moduli of quadrilaterals. II. *J. Anal.*, 15 :229–237, 2007.
- [Sha94] Igor R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry. 2*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1994. Schemes and complex manifolds, Translated from the 1988 Russian edition by Miles Reid.
- [Spr57] George Springer. *Introduction to Riemann surfaces*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1957.
- [TB97] Lloyd N. Trefethen and David Bau, III. *Numerical linear algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1997.
- [Tré85] V. Trénoguine. *Analyse fonctionnelle*. Traduit du Russe : Mathématiques. [Translations of Russian Works : Mathematics]. “Mir”, Moscow, 1985. Translated from the Russian by V. Kotliar.
- [Wag01] Matthias Wagner. *Numerische Uniformisierung hyperelliptischer Kurven*. PhD thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2001.

Curriculum vitæ

Originaire de La Chaux-des-Breuleux (JU), je suis né le 10 août 1977 à La Chaux-de-Fonds. Après mes classes primaires et secondaires à La Chaux-des-Breuleux et aux Breuleux, j'ai passé trois années au Lycée Blaise-Cendrars de La Chaux-de-Fonds et y ai obtenu une maturité scientifique en 1996.

J'ai ensuite débuté des études d'ingénieur mathématicien à l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne, études que j'ai terminées en 2002 par un travail de diplôme effectué à Florida State University à Tallahassee (USA) sous la direction des Professeurs Peter Buser (EPFL) et Mika Seppälä (FSU). De mai à octobre 2002, j'ai travaillé à l'EPFL au sein de la Chaire de Géométrie du Professeur Peter Buser en qualité d'assistant d'enseignement. Ensuite, j'ai effectué une formation postgrade en mathématiques d'une année à l'Université de Cambridge (UK). D'octobre 2003 à janvier 2009, j'ai travaillé au sein de la Chaire du Professeur Peter Buser en qualité d'assistant d'enseignement et de recherche.

Je suis marié à Daniela depuis le 24 novembre 2006.

